

EL PROBLEMA DE LA COMPETENCIA DE IDIOMAS: UN ENFOQUE DESDE LOS SISTEMAS DINÁMICOS

JENNIFER ANDREA BRAVO ROSERO



UNIVERSIDAD DEL VALLE
FACULTAD DE CIENCIAS NATURALES Y EXACTAS
PROGRAMA ACADÉMICO DE MATEMÁTICAS
SANTIAGO DE CALI
2014

EL PROBLEMA DE LA COMPETENCIA DE IDIOMAS: UN ENFOQUE DESDE LOS SISTEMAS DINÁMICOS

JENNIFER ANDREA BRAVO ROSERO

Trabajo de grado presentado como requisito parcial para optar
por el título de Matemático.

DIRECTORA:

ADRIANA GÓMEZ HOYOS, PH.D.

UNIVERSIDAD DEL VALLE
FACULTAD DE CIENCIAS NATURALES Y EXACTAS
PROGRAMA ACADÉMICO DE MATEMÁTICAS
SANTIAGO DE CALI
2014

UNIVERSIDAD DEL VALLE
FACULTAD DE CIENCIAS NATURALES Y EXACTAS
PROGRAMA ACADÉMICO DE MATEMÁTICAS

JENNIFER ANDREA BRAVO ROSERO, 1.992

EL PROBLEMA DE LA COMPETENCIA DE
IDIOMAS: UN ENFOQUE DESDE LOS
SISTEMAS DINÁMICOS

Palabras claves: Sistemas dinámicos, modelo de Abrams y Strogatz, modelo de Mira y Paredes, el idioma Palenquero.

NOTA DE APROBACIÓN

El trabajo de grado titulado “**El problema de la competencia de idiomas: un enfoque desde los sistemas dinámicos**”, presentado por la estudiante **Jennifer Andrea Bravo Rosero**, para optar al título de matemático, fue revisado por el jurado y calificado como:

Aprobado

Adriana Gómez Hoyos, Ph.D.
Directora

Jairo Duque Robles, Dr.rer.nat.
Jurado

“Hemos supuesto que todos los sistemas necesitan un liderazgo, que siempre necesitamos una comandancia interior centralizada, y esto no es cierto. Y muchos sistemas funcionarían mejor si se les permitiera organizarse a sí mismos”

Steven H. Strogatz
*(Cara a cara con la vida, la mente y el universo,
Eduardo Punset, 2004)*

Resumen

El objetivo de este trabajo de grado es investigar las propiedades de las soluciones de algunos modelos de competencia de idiomas en particular los modelos que se presentan en los artículos [1] y [12] de los autores Abrams – Strogatz y Mira – Paredes respectivamente. Se estudia y se demuestra analíticamente algunas de las conclusiones obtenidas por los autores a partir de simulaciones numéricas en [1] y [12]. Específicamente se estudia la existencia de puntos de equilibrio y su estabilidad en términos de los parámetros que intervienen en los modelos. Además se presentan ejemplos nuevos, que nos permitan generalizar las condiciones impuestas en los modelos, y simulaciones numéricas de los resultados obtenidos, con ayuda del software Wolfram Mathematica 9. Finalmente se presentan resultados numéricos correspondientes al caso de la lengua palenquera hablada en Colombia. En particular se intenta estimar los parámetros a , c y s del modelo de Abrams – Strogatz, asociados a esta lengua.

Índice general

| | |
|--|------------|
| Prefacio | vii |
| Agradecimientos | ix |
| 1. Introducción | 1 |
| 1.1. Sistemas dinámicos | 2 |
| 1.2. Equilibrios y linealización | 4 |
| 1.3. Sistemas lineales dos dimensionales | 5 |
| 1.4. Aplicaciones en biología: el modelo de Lotka – Volterra | 7 |
| 2. Modelo de Abrams y Strogatz | 10 |
| 2.1. Función de probabilidad $P(x, s) = cx^a s$ | 11 |
| 2.2. Otras funciones de probabilidad | 15 |
| 3. Modelo de Mira y Paredes | 20 |
| 3.1. Similitud y coexistencia de idiomas | 20 |
| 3.2. Equilibrios y estabilidad | 22 |
| 4. Aplicación del modelo de Abrams y Strogatz en Colombia | 35 |
| 4.1. La población Raizal y Palenquera | 36 |
| 4.2. Estimación de parámetros | 39 |
| 5. Conclusiones y trabajos futuros | 42 |
| 5.1. Conclusiones | 42 |
| 5.2. Trabajos futuros | 43 |
| Bibliografía | 44 |

Prefacio

El análisis de sistemas no lineales de ecuaciones diferenciales ordinarias ha sido un trabajo que numerosos científicos han desarrollado a lo largo del tiempo, con el propósito de estudiar diferentes fenómenos físicos de la naturaleza. También, aunque un poco más tarde, ha habido un creciente interés en aplicar la teoría de los sistemas dinámicos a modelos relacionados con biología, epidemiología, economía, sociología, entre otras áreas distintas a la física tradicional.

Una aplicación muy famosa de los sistemas no lineales de ecuaciones diferenciales ordinarias en biología es el *modelo predador – presa*, también conocido como *modelo de Lotka – Volterra* que data del año 1925, el cual considera un par de especies que interactúan. Si x es la población de presas, y la población de predadores, a y c son parámetros que representan las razones de crecimiento de las especies y b y d son parámetros relacionados con su interacción, el *modelo de Lotka – Volterra* corresponde al sistema de ecuaciones (ver sección 1.4),

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = x(a - by) \\ \frac{dy}{dt} = y(-c + dx). \end{cases}$$

La solución de los sistemas no lineales no es en general fácil, pero gracias a los desarrollos tecnológicos conseguidos durante las últimas décadas, tales como los paquetes de software que brindan la facilidad de realizar simulaciones que complementan las técnicas analíticas, es posible ganar muchísima información sobre las soluciones de estos sistemas. El trabajo requerido para obtener esa información no deja sin embargo de ser complicado.

Un problema que interesa a lingüistas y sociólogos es la forma en que evoluciona el número de hablantes de un determinado idioma. En los últimos cincuenta o cien años una cantidad importante de idiomas han desaparecido y muchos otros se encuentran en riesgo de desaparecer. Sin embargo solo recientemente han aparecido trabajos con los cuales los científicos intentan dar modelos matemáticos para este problema.

En el primer capítulo se presentan algunos conceptos y resultados básicos necesarios para el estudio de los sistemas dinámicos, así mismo se presentan ejemplos de mode-

los poblacionales en el campo de la biología para dar un primer acercamiento a las aplicaciones de los sistemas dinámicos en las diversas ciencias.

Abrams y Strogatz en el año 2003 introdujeron en [1] un modelo en el que por simplicidad se asume una población sin estructura social, cuyo tamaño se mantiene constante, y en la que todas las personas son monolingües, de uno de dos idiomas que compiten entre sí por el número de hablantes, de acuerdo con las oportunidades sociales y económicas que cada idioma ofrece a sus hablantes. Los autores concluyen con este modelo que la coexistencia a largo plazo de ambos idiomas no se da e inevitablemente morirá uno de los dos idiomas en competencia.

En el año 2005 los autores Mira y Paredes al estudiar el modelo de Abrams y Strogatz notan que ese modelo no tiene en cuenta las situaciones donde exista un grupo bilingüe, además reflexionan sobre la importancia que tiene la similitud de la gramática y el vocabulario correspondiente a cada uno de los idiomas, así en [12] desarrollan un modelo en donde sea posible la existencia de hablantes bilingües y concluyen que la semejanza de los idiomas es el parámetro clave para que se dé la supervivencia de ambos idiomas.

Las conclusiones expuestas en [1] y [12] se obtienen de simulaciones numéricas. En el segundo y tercer capítulo de este trabajo de grado se estudiarán estos modelos respectivamente y se desarrollarán las demostraciones analíticas de algunos de los resultados planteados por los autores, específicamente se estudiará la existencia de puntos de equilibrio y su estabilidad en términos de los parámetros que intervienen en los modelos. Sin embargo, Mira y otros autores en un artículo recientemente publicado en Diciembre de 2013 [3], han avanzado precisamente en esa dirección.

En el cuarto capítulo se aplicará el modelo de Abrams y Strogatz en el caso de la población colombiana Palenquera y se explicará las dificultades para aplicarlo a la población Raizal del Archipiélago de San Andrés, Providencia y Santa Catalina. Esto con el fin de verificar la validez de este modelo a partir de datos encontrados en las correspondientes encuestas realizadas en Colombia.

En el quinto capítulo se escribirán finalmente las conclusiones a las que se llegó mientras se realizaban cada uno de los capítulos de este trabajo, además se redactarán los posibles trabajos futuros que nos ofrece el desarrollo del mismo.

Los cálculos numéricos y las respectivas gráficas que se realizarán en este trabajo de grado se harán con la ayuda del software Wolfram Mathematica 9.

Agradecimientos

En esta sección me gustaría expresar mi más profundo y sincero agradecimiento, inicialmente a Dios y, a todas aquellas personas que de diferentes maneras aportaron todo su apoyo incondicional para lograr la realización plena del presente trabajo.

Agradecer en especial a la Dra. Adriana Gómez Hoyos, directora de mi trabajo de grado, por la orientación, la supervisión y el continuo seguimiento del desarrollo del mismo, además por permitirme conocer este hermoso campo de la ciencia matemática y por toda su motivación, tiempo, ayuda y atención recibida a lo largo de estos años.

A mi madre, padre y hermana por brindarme la armonía y comprensión suficiente para escribir cada una de las líneas que están presentes en este trabajo, por su ánimo, apoyo, paciencia que me han brindado durante toda mi vida, y en especial por estos largos años, para poder hacer posible la conclusión de mis estudios y el inicio de una vida profesional, quiero decirles mil y mil gracias.

Un agradecimiento muy especial merecen mi familia y mis amigos del Departamento de Matemáticas de la Universidad del Valle por su amistad y colaboración, por compartir conmigo tan buenos momentos.

A todos ellos, muchas gracias.

Capítulo 1

Introducción

En las ciencias y sus aplicaciones muchos problemas se plantean en términos matemáticos, comúnmente estos modelos conducen a una o varias ecuaciones que contienen algunas derivadas de una función no conocida. Cuando la función no conocida depende de una sola variable, que usualmente representa el tiempo y se denota por t , el resultado es una ecuación diferencial *ordinaria* que son con las que trabajaremos de ahora en adelante.

Supongamos \mathbf{y} una función cuyo dominio sea \mathbb{R} y rango un espacio N y denotemos a la derivada de \mathbf{y} respecto a t como $d\mathbf{y}/dt$ ó $\dot{\mathbf{y}}$ entonces tenemos que una *ecuación diferencial ordinaria (EDO)* es una relación entre t , \mathbf{y} y un número finito de derivadas de \mathbf{y} :

$$\mathbf{F} \left(t, \mathbf{y}, \frac{d\mathbf{y}}{dt}, \dots, \frac{d^k \mathbf{y}}{dt^k} \right) = 0. \quad (1.1)$$

Luego si el espacio N es de dimensión n tenemos que (1.1) define un *sistema de n EDOs* y si puede resolverse explícitamente para la derivada de mayor grado entonces se verá de la forma

$$\frac{d^k \mathbf{y}}{dt^k} = \mathbf{G} \left(t, \mathbf{y}, \frac{d\mathbf{y}}{dt}, \dots, \frac{d^{k-1} \mathbf{y}}{dt^{k-1}} \right). \quad (1.2)$$

Cuando no es posible, la ecuación diferencial se dice que es *implícita*. Sin embargo tenemos que para cualquier EDO explícita podemos fácilmente reescribir de ella un *sistema de EDOs de primer orden* introduciendo las nuevas variables

$$\mathbf{x}_1 = \mathbf{y}, \quad \mathbf{x}_2 = \frac{d\mathbf{y}}{dt}, \quad \mathbf{x}_3 = \frac{d^2 \mathbf{y}}{dt^2} \quad \dots \quad \mathbf{x}_k = \frac{d^{k-1} \mathbf{y}}{dt^{k-1}},$$

y reemplazándolas en (1.2).

El sistema de ecuaciones diferenciales de primer orden que obtenemos consta de k ecuaciones de primer orden en la variable x_i y queda expresado como sigue

$$\begin{cases} \frac{d\mathbf{x}_i}{dt} = \mathbf{x}_{i+1}, & i = 1, 2, \dots, k-1, \\ \frac{d\mathbf{x}_k}{dt} = \mathbf{G}(t, \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_k). \end{cases} \quad (1.3)$$

Observemos que el sistema (1.3) tiene $m = k \times n$ variables, ya que cada \mathbf{x}_i es n dimensional y hay k EDOs, y puede escribirse como

$$\frac{dx_i}{dt} = f_i(t, x_1, x_2, \dots, x_{m-1}, x_m), \quad i = 1, 2, \dots, m,$$

de forma mas simplificada tenemos que si $x = (x_1, x_2, \dots, x_m)$ y $f = (f_1, f_2, \dots, f_m)$ entonces el sistema (1.3) finalmente queda como sigue

$$\dot{x} = f(t, x). \quad (1.4)$$

Además si f en (1.4) no depende de t se dice que el sistema es *autónomo* y quedará expresado como

$$\dot{x} = f(x). \quad (1.5)$$

La teoría que se estudiará en este capítulo estará dada inicialmente para sistemas autónomos. El sistema (1.4) es lineal si $f(t, x)$ es de la forma $f(t, x) = A(t)x + g(t)$ con $A(t)$ una matriz.

Cuando el sistema es lineal y $A(t)$ es de coeficientes constantes entonces es posible, en principio, dar soluciones en forma explícita. Sin embargo los sistemas no lineales de ecuaciones diferenciales resultan de gran interés, ya que con ellos se describe la dinámica de muchos fenómenos físicos, aunque en la mayor parte de los casos no es factible resolverlos analíticamente. Por lo tanto nos vemos obligados a recurrir al análisis numérico o a técnicas que nos permitan obtener y conocer resultados sobre el comportamiento de las soluciones del sistema o sobre la la dinámica del mismo.

Por ejemplo mediante las técnicas de linealización es posible reemplazar un sistema no lineal por uno lineal que lo aproxime localmente, en la vecindad de un equilibrio. En particular se tiene el célebre teorema de Hartman – Grobman (ver Teorema 1.2.1), pero antes de entrar a describir las técnicas cualitativas haremos una pequeña introducción de los conceptos que utilizaremos a lo largo de este trabajo.

1.1. Sistemas dinámicos

Históricamente las ecuaciones diferenciales han dado lugar al desarrollo de un concepto más general que es el de los sistemas dinámicos.

Los sistemas dinámicos juegan un papel muy importante actualmente en la comunidad científica y están en continua interacción no sólo con las matemáticas sino con otras áreas del conocimiento, tales como la física, la química, la biología, la economía y como lo veremos en este trabajo también con la lingüística, ya que con ellos se pretende describir la dinámica del universo.

Definir el concepto de sistema dinámico no ha sido del todo fácil a lo largo de la historia, sin embargo con ayuda de [6], [7] y [14] detallaremos este concepto y los demás que se presentarán, así tenemos que

Definición 1.1.1 (Sistema dinámico). *Un sistema dinámico es una regla que define una trayectoria como función de un parámetro sobre un conjunto de estados posibles llamado espacio de fases.*

En otras palabras un sistema dinámico es una forma de describir el paso en el tiempo de todos los puntos de un espacio dado, de tal manera que con su estudio nos permita reconstruir el pasado y predecir el futuro.

El conjunto de valores que las variables pueden tomar forma el espacio de fases. Supongamos que este espacio de fases corresponda a un cierto conjunto M . En ese caso un sistema dinámico puede verse como una familia de funciones $\varphi : \mathbb{R} \times M \rightarrow M$ que satisface ciertas condiciones. En este trabajo nos interesa el caso en el que M es un subconjunto de \mathbb{R}^n y φ es diferenciable con respecto al tiempo t . Se tiene entonces la noción de flujo completo que pasamos a definir.

Definición 1.1.2 (Flujo completo). *Un flujo completo $\varphi_t(x) = \varphi(t, x)$ es una familia uniparámetrica de funciones continuamente diferenciables $\varphi : \mathbb{R} \times M \rightarrow M$, tales que*

1. $\varphi_0(x) = \varphi(0, x) = x$ para todo $x \in M$
2. $\varphi(t, \varphi(s, x)) = \varphi(t + s, x)$ ó $\varphi_t \circ \varphi_s(x) = \varphi_{t+s}(x)$

Un flujo puede verse como una familia de soluciones de un sistema de ecuaciones diferenciables, pues si se define la función $f(x)$ como

$$f(x) = \left. \frac{d}{dt} \varphi_t(x) \right|_{t=0}$$

entonces $x(t) = \varphi_t(x_0)$ es solución del problema de valores iniciales (ver por ejemplo el lema 4.1 en [7]),

$$\dot{x}(t) = f(x(t)), \quad x(0) = x_0. \quad (1.6)$$

Recíprocamente las soluciones de un sistema de ecuaciones diferenciales permiten definir un flujo.

1.2. Equilibrios y linealización

Un buen inicio para analizar los sistemas diferenciales autónomos no lineales como (1.5) es determinar cuáles son sus puntos de equilibrio y describir el comportamiento de (1.5) cerca a sus puntos de equilibrio.

Definición 1.2.1 (Equilibrio). *Un punto x^* es un equilibrio de (1.5) si $f(x^*) = 0$.*

Además tenemos que un equilibrio x^* del flujo φ_t es *estable* si para toda vecindad N de x^* hay una vecindad M , $M \subset N$, tal que si $x \in M$, entonces $\varphi_t(x) \in N$ para todos los $t \geq 0$. Un equilibrio que no es estable es llamado *inestable*.

Nótese que si x^* es un equilibrio entonces $x(t) = x^*$ es una solución del sistema $\dot{x} = f(x)$. Sin embargo aún no tenemos como estudiar estos equilibrios en el sistema (1.5) por lo tanto suponiendo el campo vectorial $f : E \rightarrow \mathbb{R}^n$ de clase C^1 tenemos que

Definición 1.2.2 (Linealización). *La linealización de $\dot{x} = f(x)$ en el equilibrio $x^* \in E$ está dada por el sistema de EDOs*

$$\dot{y} = Df(x^*)y. \quad (1.7)$$

Observemos que la matriz $A = Df(x^*)$, que corresponde a la matriz de linealización del sistema no lineal (1.5), es constante y por lo tanto el sistema (1.7) es lineal de coeficientes constantes permitiéndonos aplicar toda las técnicas de estudio para los sistemas lineales. En particular, en la sección 1.3 desarrollaremos un estudio detallado de los sistemas lineales de coeficientes constantes de dimensión 2.

Los equilibrios de un sistema se clasifican en hiperbólicos y no hiperbólicos.

Definición 1.2.3 (Equilibrio hiperbólico). *Un equilibrio x^* de un campo vectorial f de clase C^1 es hiperbólico si ninguno de los valores propios de la matriz $Df(x^*)$ tiene parte real cero.*

Además los equilibrios hiperbólicos se clasifican en tres grupos:

1. Sumidero: Un equilibrio se llama un sumidero si todos los valores propios de la matriz $Df(x^*)$ tienen parte real negativa.
2. Fuente: Un equilibrio se llama un fuente si todos los valores propios de la matriz $Df(x^*)$ tienen parte real positiva.
3. Silla: Un equilibrio se llama un silla si es un punto de equilibrio hiperbólico al menos con un valor propio de la matriz $Df(x^*)$ con parte real positiva y al menos con uno de parte real negativa.

Vale la pena resaltar que todas estas definiciones son relevantes en vista del Teorema de Hartman – Grobman que es muy importante en la teoría cualitativa local de las ecuaciones diferenciales ordinarias y enunciaremos a continuación.

Teorema 1.2.1 (Hartman – Grobman). *Si x_0 es un equilibrio hiperbólico del flujo φ_t , asociado a un campo vectorial de clase C^1 , entonces existe una vecindad N de x_0 , tal que φ_t es topológicamente conjugado (en N) a su linealización.*

En donde se tiene que dos flujos $\varphi_t : A \rightarrow A$ y $\psi_t : B \rightarrow B$ son *topológicamente conjugados* si existe un homeomorfismo $h : A \rightarrow B$ tal que para cada $x \in A$ y $t \in \mathbb{R}$

$$h(\varphi_t(x)) = \psi_t(h(x)).$$

Para ampliar estos conceptos ver sección 4.7 de [7].

1.3. Sistemas lineales dos dimensionales

La naturaleza y la estabilidad de los puntos de equilibrio correspondiente a sistemas autónomos lineales están determinados por los valores propios de la matriz del sistema. Para estudiar detalladamente la conclusión anterior consideraremos el siguiente sistema lineal dos dimensional como caso particular:

$$\begin{cases} \dot{x} = ax + by \\ \dot{y} = cx + dy \end{cases}, \quad (1.8)$$

con a, b, c y d constantes, luego reescribiendo el sistema (1.8) tenemos que se puede ver en términos generales como

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} x. \quad (1.9)$$

Sea $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ la matriz constante del sistema (1.9). Ahora si

$$\begin{aligned} \tau &\equiv \text{tr}(A) = a + d, \\ \delta &\equiv \det(A) = ad - bc, \end{aligned}$$

son respectivamente la *traza* y el *determinante* de A , entonces puede verse que los valores propios pueden expresarse en términos de τ y δ .

Tenemos entonces que el polinomio característico p de A se puede ver como

$$p(\lambda) = \lambda^2 - \tau\lambda + \delta. \quad (1.10)$$

Observando así que los valores propios de A corresponden a los ceros de p y como p en (1.10) es un polinomio cuadrático tenemos que sus ceros son:

$$\lambda_{\pm} = \frac{\tau \pm \sqrt{\Delta}}{2}, \quad \Delta \equiv \tau^2 - 4\delta = (a - d)^2 + 4bc. \quad (1.11)$$

Llamamos a Δ el *discriminante* de p de manera que si $\Delta \geq 0$ los valores propios son reales y si $\Delta < 0$ son complejos. Además $\delta = \lambda_- \lambda_+$ y $\tau = \lambda_- + \lambda_+$. Así tenemos que

1. Si $\Delta \geq 0$ los valores propios son reales. Además si $\delta < 0$, λ_{\pm} tienen signos contrarios y en este caso el punto de equilibrio es una *silla*. De otro lado si $\delta > 0$ ambos valores propios tiene el mismo signo y en ese caso se habla de que el equilibrio es un *nodo*. Si son negativos, esto es cuando además $\tau < 0$, el nodo es estable, mientras que si son positivos, esto es cuando $\tau > 0$, el nodo es inestable. (Ver Figura 1.1).
2. Si $\Delta < 0$ los valores propios son complejos, de la forma $\lambda_{\pm} = \alpha \pm i\beta$, $\beta > 0$, y en ese caso se dice que el equilibrio es un *foco*. Si $\alpha < 0$, (que corresponde a $\tau < 0$) el foco es estable, mientras que si $\alpha > 0$, (correspondiente a $\tau > 0$) el foco es inestable. (Ver Figura 1.1).

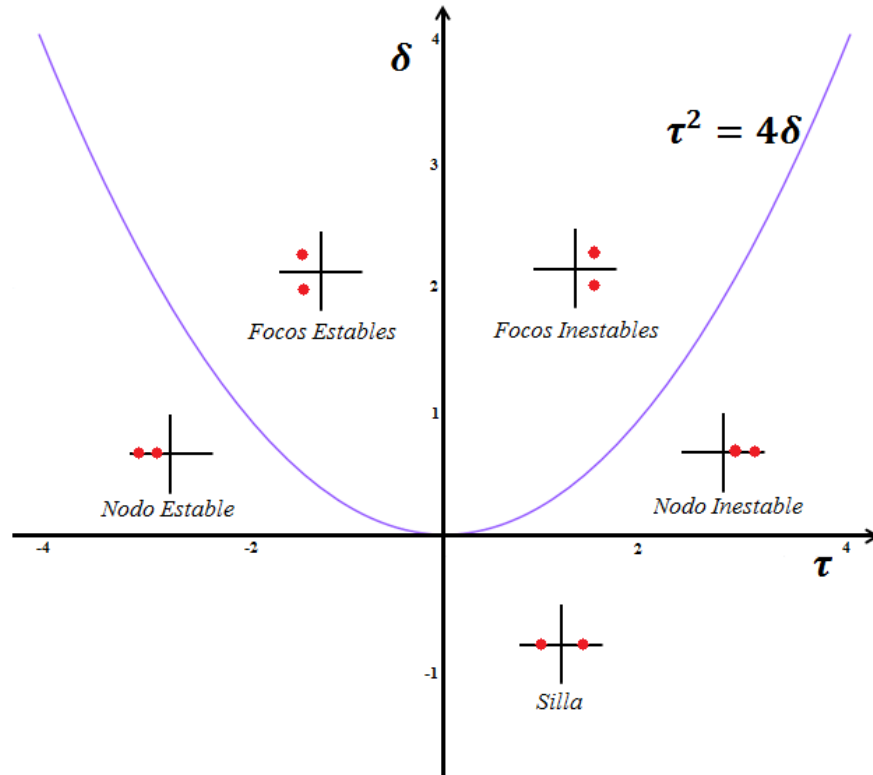


Figura 1.1: Clasificación de los valores propios para los sistemas lineales dos dimensionales en el espacio de los parámetros *traza*, τ , y *determinante*, δ .

Para ayudar a entender el comportamiento de un modelo de dos dimensiones puede ser útil también tener en cuenta las llamadas *curvas nulclinas*, así tenemos la siguiente definición

Definición 1.3.1 (Curvas nulclinas). *Dado el sistema dos dimensional*

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = F(x, y) \\ \frac{dy}{dt} = G(x, y), \end{cases} \quad (1.12)$$

se dice que las x -nulclinas son el conjunto de todos los puntos donde $\frac{dx}{dt} = 0$, es decir, las curvas definidas por $F(x, y) = 0$. Análogamente las y -nulclinas son el conjunto de todos los puntos donde $\frac{dy}{dt} = 0$.

La importancia de esta herramienta es que las intersecciones de las x -nulclinas y y -nulclinas producen los puntos de equilibrio del sistema (1.12) y además el retrato de fases en las regiones entre las nulclinas nos ayudan a entender el comportamiento de los equilibrios, al menos desde un punto de vista cualitativo.

1.4. Aplicaciones en biología: el modelo de Lotka – Volterra

En esta sección se hará uso de las técnicas introducidas, en la secciones anteriores, para ilustrar el análisis correspondiente al *modelo de Lotka – Volterra*.

Consideremos un par de especies x y y que corresponden a la población de presa y de predadores respectivamente y supongamos que la población de presas es el suministro total de alimento para los predadores. Además que en ausencia de predadores la población de presas crece a un ritmo proporcional a la población actual y que en ausencia de presas la población de predadores decrece a un ritmo proporcional a la población actual.

Por otro lado cuando las presas y predadores están presentes en el medio, se supone que la población de presas disminuye a una tasa proporcional al número de encuentros con los predadores y la población de predadores aumenta a una tasa proporcional al número de encuentros con las presas.

Así con las anteriores suposiciones y con a, b, c y d parámetros positivos, $x, y \geq 0$, llegamos a que el modelo de Lotka – Voterra queda expresado como sigue

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = ax - bxy \\ \frac{dy}{dt} = -cy + dxy \end{cases} . \quad (1.13)$$

Iniciemos el estudio del modelo (1.13) localizando sus puntos de equilibrio

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = x(a - by) = 0 \\ \frac{dy}{dt} = y(-c + dx) = 0 \end{cases}. \quad (1.14)$$

Por lo tanto de (1.14) tenemos que si $x = 0$ entonces $y = 0$ y si $y = a/b$ entonces $x = d/c$. Es decir que $(0, 0)$ y $(c/d, a/b)$ son puntos de equilibrio del sistema (1.13), sin embargo no tenemos información sobre la estabilidad de estos dos puntos así que pasaremos a linealizar el sistema (1.13).

Definamos la función F como

$$F(x, y) = (x(a - by), y(-c + dx))^T. \quad (1.15)$$

La matriz de linealización de (1.15) está dada por

$$DF(x, y) = \begin{pmatrix} a - by & -bx \\ dy & -c + dx \end{pmatrix}. \quad (1.16)$$

Luego evaluando $(x, y) = (0, 0)$ en la matriz (1.16) tenemos que

$$DF(0, 0) = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & -c \end{pmatrix}.$$

y los valores propios correspondientes serían $\lambda_1 = a$ y $\lambda_2 = -c$ que tienen signos contrarios, es decir $\lambda_1 > 0$ y $\lambda_2 < 0$ ya que los parámetros a y c son positivos, luego $(x, y) = (0, 0)$ es un punto silla.

Por otro lado tenemos que para $(x, y) = (c/d, a/b)$ la matriz (1.16) queda como sigue

$$DF(c/d, a/b) = \begin{pmatrix} 0 & -bc/d \\ ad/b & 0 \end{pmatrix}. \quad (1.17)$$

Los ceros del polinomio característico de (1.17) según (1.11) están dados por

$$\lambda_{\pm} = \frac{\pm\sqrt{-4ac}}{2} = \pm i\sqrt{ac},$$

entonces los valores propios, λ_{\pm} , son complejos y además la parte real de ellos es igual a cero, $Re(\lambda_{\pm}) = 0$, es decir $(x, y) = (c/d, a/b)$ es un equilibrio no hiperbólico.

Cuando un equilibrio no es hiperbólico el Teorema de Hartman - Grobman no es aplicable y no se puede deducir el comportamiento del equilibrio a partir de su linealización. Sin embargo puede probarse que $(x, y) = (c/d, a/b)$ es un equilibrio estable

usando la técnica desarrollada por Aleksandr Lyapunov que consiste en la construcción de una *función de Lyapunov*. Más aún, puede demostrarse que todas las soluciones del modelo son órbitas cerradas (esto es, soluciones periódicas), excepto el equilibrio $(0, 0)$ y las soluciones con condición inicial en los ejes coordenados.

En este trabajo no profundizaremos en la técnica de las funciones de Lyapunov. El lector interesado puede consultar las secciones 4.6 de [7] y 11.2 de [6].

El modelo de Lotka – Volterra predice entonces que tanto la población de presas como la de predadores sobrevivirán, siempre que inicialmente estén presentes.

Hay muchas otras aplicaciones famosas de los sistemas dinámicos a las diferentes ciencias como lo son los modelos epidemiológicos *SIR* y *SIRS* (ver sección 11.1 en [6]).

Capítulo 2

Modelo de Abrams y Strogatz

El modelo expuesto por Abrams y Strogatz en [1] considera una población constante T , sin estructura espacial o social, en la que todos los hablantes son monolingües y solamente hablan el idioma X o el idioma Y por lo tanto la posibilidad del bilingüismo no se considera en este modelo. Además se involucra el prestigio, un parámetro que refleja las oportunidades sociales y económicas que cada idioma ofrece a sus hablantes, donde s_x representa el prestigio del idioma X y s_y representa el prestigio del idioma Y . Así, se presenta la competencia de dos idiomas, X y Y , por el número de hablantes de cada uno.

Dado que la población es constante y la única opción que tienen sus habitantes es hablar X o Y , entonces se tiene que $X + Y = T$, normalizando llegamos a que $\frac{X}{T} + \frac{Y}{T} = 1$ de manera que si x representa la fracción de la población que habla X , mientras que y es la fracción que habla Y , se tiene que $x + y = 1$. Igualmente normalizando la escala se puede asumir que $s_x + s_y = 1$.

Si la probabilidad por unidad de tiempo de que un individuo que habla Y se pase a hablar X , está dada por $P_{YX}(x, s_x)$, y la probabilidad por unidad de tiempo de que un individuo que hable X se pase a hablar Y , está dada por $P_{XY}(y, s_y)$, entonces el modelo de Abrams y Strogatz, se expresa mediante el sistema

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = yP_{YX}(x, s_x) - xP_{XY}(y, s_y) \\ \frac{dy}{dt} = xP_{XY}(y, s_y) - yP_{YX}(x, s_x). \end{cases} \quad (2.1)$$

Como $x + y = 1$ entonces efectivamente se tiene que $\frac{dx}{dt} = -\frac{dy}{dt}$, así el sistema (2.1) se puede simplificar a estudiar una sola ecuación diferencial dada por

$$\frac{dx}{dt} = yP_{YX}(x, s_x) - xP_{XY}(y, s_y). \quad (2.2)$$

Además debido a la simetría del sistema y a que no hay estructura social entonces

las probabilidades de pasar a hablar del idioma X al idioma Y y viceversa son iguales, es decir, $P_{YX} = P_{XY} = P$. Teniendo en cuenta que $y = 1 - x$ y $s_y = 1 - s_x$, reparametrizando con $s = s_x$, se llega finalmente a que la ecuación (2.2) se puede reducir a estudiar la siguiente ecuación diferencial

$$\frac{dx}{dt} = (1 - x)P(x, s) - xP(1 - x, 1 - s). \quad (2.3)$$

Es natural esperar que P sea una función que satisfaga las condiciones:

(AS 1) $P(0, s) = 0$, es decir que en ausencia de hablantes de un idioma nadie adoptaría ese idioma.

(AS 2) $P(x, 0) = 0$, nadie va a adoptar un idioma que no ofrece ningún prestigio.

(AS 3) $P(*, s)$ y $P(x, *)$ funciones monótonas crecientes y suaves.

2.1. Función de probabilidad $P(x, s) = cx^a s$

Abrams y Strogatz en [1] consideran la familia de funciones de probabilidad descritas por

$$P(x, s) = cx^a s \quad (2.4)$$

que efectivamente satisfacen las condiciones (AS 1), (AS 2) y (AS 3) que anteriormente se le designaron a P , siempre y cuando $a > 0$, suave si $a \geq 1$.

La ecuación diferencial asociada a esta función de probabilidad está dada por:

$$\frac{dx}{dt} = c((1 - x)x^a s - x(1 - x)^a(1 - s)). \quad (2.5)$$

Puntos de equilibrio y estabilidad

Haciendo $t = \beta\tau$ se tiene que

$$\frac{dx}{dt} = \frac{dx}{d\tau} \frac{d\tau}{dt} = \frac{1}{\beta} \frac{dx}{d\tau},$$

y reemplazando en (2.5) obtenemos

$$\frac{dx}{d\tau} = \beta c((1 - x)x^a s - x(1 - x)^a(1 - s)).$$

Luego si $\beta c = 1$, y reescribiendo nuevamente al final $t = \tau$ sin pérdida de generalidad obtenemos finalmente una ecuación más simplificada con la cual estudiaremos la estabilidad del sistema (2.1)

$$\frac{dx}{dt} = (1 - x)x^a s - x(1 - x)^a(1 - s). \quad (2.6)$$

Definiendo la función G de la siguiente forma

$$G(x) = (1 - x)x^a s - x(1 - x)^a(1 - s), \quad (2.7)$$

entonces los equilibrios de (2.6) corresponden a las raíces de la ecuación $G(x) = 0$.

Es fácil ver que $x = 0$ y $x = 1$ son soluciones de esta ecuación. Adicionalmente para $a \neq 1$, existe un tercer punto de equilibrio x^* que se obtiene resolviendo esta ecuación y suponiendo $x^* \neq 0$ y $x^* \neq 1$.

$$\begin{aligned} (1 - x^*)(x^*)^a s &= x^*(1 - x^*)^a(1 - s) \\ \left(\frac{1 - x^*}{x^*}\right)^{1-a} &= \frac{1 - s}{s} \\ x^* &= \frac{1}{\left(\frac{1-s}{s}\right)^{\frac{1}{1-a}} + 1}, \quad a \neq 1. \end{aligned} \quad (2.8)$$

Adicionalmente si $a = 1$ y $s = 1/2$ todos los puntos del intervalo $[0, 1]$ son equilibrios. Analizando el comportamiento de los equilibrios de (2.6) obtenemos que:

Análisis de estabilidad cuando $a = 1$

La ecuación diferencial correspondiente está dada por

$$\frac{dx}{dt} = (1 - x)xs - x(1 - x)(1 - s).$$

Luego la función G quedará escrita como $G(x) = (1 - x)xs - x(1 - x)(1 - s)$ entonces al derivar respecto a x la función G obtenemos

$$G'(x) = -xs + (1 - x)s - (1 - x)(1 - s) + x(1 - s). \quad (2.9)$$

Fácilmente se puede ver que al evaluar en la función (2.9) $x = 0$ y $x = 1$ llegamos a $G'(0) = 2s - 1$ y $G'(1) = -2s + 1$ con lo cual concluimos que para valores de $s > 1/2$ se tiene que $G'(0) > 0$ y $G'(1) < 0$ y para valores de $s < 1/2$ se tiene que $G'(0) < 0$ y $G'(1) > 0$.

Por el criterio de estabilidad (Teorema 1.2.1)

1. $x = 0$ es inestable y $x = 1$ es estable para $s > 1/2$.
2. $x = 0$ es estable y $x = 1$ es inestable para $s < 1/2$
3. Para $s = 1/2$ todos los $x \in [0, 1]$ son estables.

En la Figura 2.1 se muestra la función G para distintos valores de s , y numéricamente también se observa que no hay existencia de un tercer punto de equilibrio.

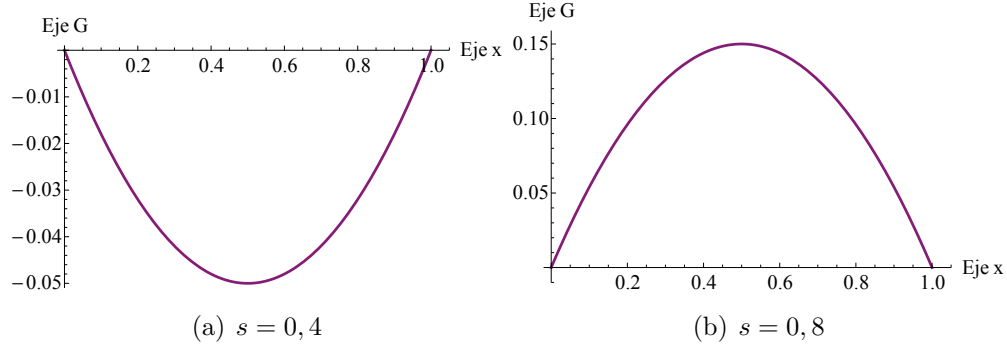


Figura 2.1: $G(x) = (1-x)xs - x(1-x)(1-s)$; $0 < x, s < 1$

Análisis de estabilidad cuando $a > 1$

Recordando que con la función (2.7) se estudian los equilibrios de (2.6) entonces derivando respecto a x la función G obtenemos que

$$G'(x) = -x^a s + a(1-x)x^{a-1}s - (1-x)^a(1-s) + ax(1-x)^{a-1}(1-s). \quad (2.10)$$

Fácilmente se puede ver cuando evaluamos $x = 0$ y $x = 1$ en la función (2.10) que $G'(0) = s - 1 < 0$ y $G'(1) = -s < 0$ y por el criterio de estabilidad (Teorema 1.2.1) $x = 0$ y $x = 1$ son estables.

Sin embargo al evaluar x^* , dado en (2.8), en (2.10) no es tan fácil de ahí concluir su estabilidad. Pero por la naturaleza que tienen $x = 0$ y $x = 1$, y el hecho de que $G(x)$ tiene un único cero en el intervalo $[0, 1]$, concluimos que $G(x) \leq 0$ si $x \in [0, x^*]$ y $G(x) \geq 0$ si $x \in [x^*, 1]$ y por lo tanto x^* es inestable, como se muestra en las Figuras 2.2 y 2.3.

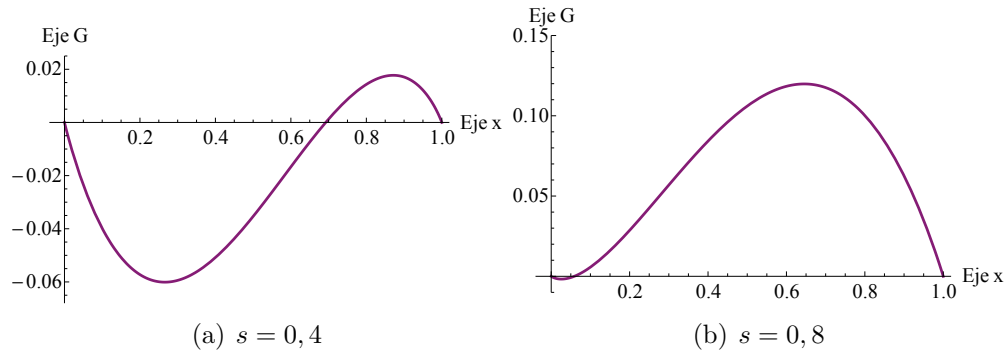
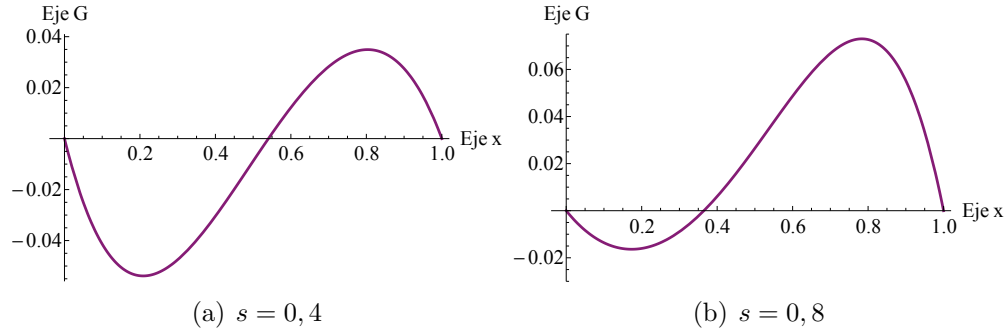


Figura 2.2: $G(x)$; $0 < x < 1$, $a = 1,5$

Figura 2.3: $G(x)$; $0 < x < 1$, $a = 3, 5$

Análisis de estabilidad cuando $a < 1$

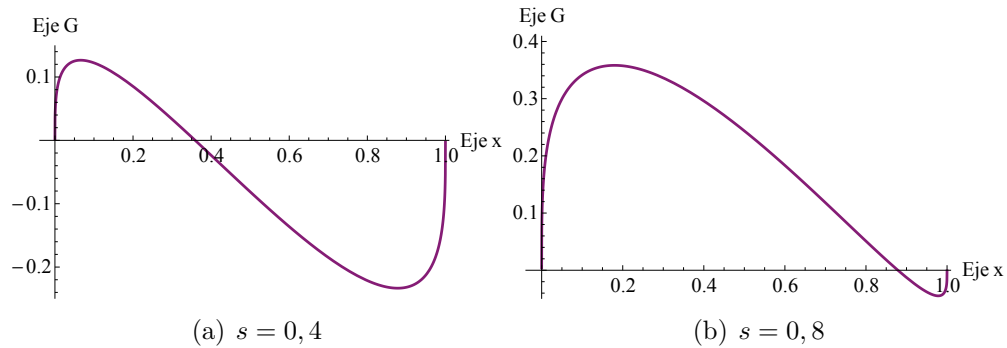
Aunque el caso cuando $a < 1$ no es considerado en el modelo de Abrams y Strogatz ya que no cumple **(AS 3)**, matemáticamente sería interesante ver qué pasa. Sin embargo no podemos evaluar $x = 0$ y $x = 1$ en (2.10) para encontrar su estabilidad ya que los valores $G'(0)$ y $G'(1)$ no están definidos.

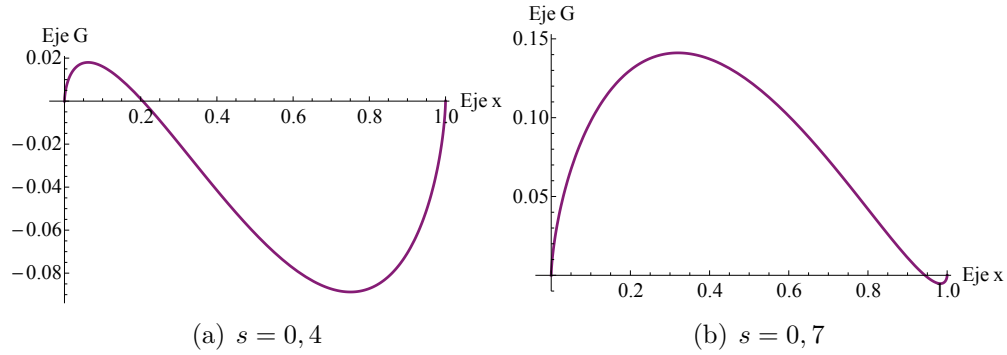
Así que estudiaremos el comportamiento de los puntos de equilibrio analizando el signo de G , que reescribiéndola estaría dada por

$$G(x) = (1 - x)^a x^a [(1 - x)^{1-a} s - x^{1-a} (1 - s)].$$

Además se tiene que $G(x) > 0$ si $x \in (0, x^*)$ y $G(x) < 0$ si $x \in (x^*, 1)$. Luego $x = 0$ y $x = 1$ son inestables y $x = x^*$ será estable, como se muestra en las Figuras 2.4 y 2.5.

En este caso siempre hay coexistencia de los idiomas, sin embargo resaltamos que esta función no cumple exactamente con la condición **(AS 3)** de Abrams y Strogatz ya que la función $P(*, s)$ no es derivable en $x = 0$ y $x = 1$.

Figura 2.4: $G(x)$; $0 < x < 1$, $a = 0, 3$

Figura 2.5: $G(x)$; $0 < x < 1$, $a = 0,7$

2.2. Otras funciones de probabilidad

Ahora vamos a analizar la ecuación diferencial del modelo de Abrams y Strogatz (2.3) para una función cualquiera de probabilidad, $P(x, s)$, que satisfaga las condiciones (AS 1), (AS 2) y (AS 3) impuestas por ellos. Entonces definiendo

$$G(x) = (1 - x)P(x, s) - xP(1 - x, 1 - s)$$

y derivando G respecto a x obtenemos que

$$G'(x) = -P(x, s) + (1 - x)P'(x, s) - P(1 - x, 1 - s) + xP'(1 - x, 1 - s). \quad (2.11)$$

Luego si evaluamos $x = 0$ y $x = 1$, que claramente son puntos de equilibrio de (2.3), entonces por las condiciones iniciales dadas, $P(0, s) = 0$, se tiene de (2.11) que

$$\begin{aligned} G'(0) &= P'(0, s) - P(1, 1 - s) \\ G'(1) &= -P(1, s) + P'(0, 1 - s). \end{aligned}$$

Luego si $P'(0, *) = 0$, claramente $G'(0) < 0$ y $G'(1) < 0$ ya que $P(x, *) > 0$, y se tendría que $x = 0$ y $x = 1$ son estables. Por lo tanto podríamos escribir el siguiente teorema:

Teorema 2.2.1. *Si $P(x, s)$ es una función de probabilidad que satisface las condiciones (AS 1), (AS 2) y (AS 3), y además $P'(0, s) = 0$, entonces se garantiza la existencia de un tercer punto de equilibrio. Si este tercer punto de equilibrio es único entonces será inestable.*

Por otro lado tenemos que si $P'(0, *) \neq 0$ no siempre se garantiza la existencia de un tercer punto equilibrio, ni la estabilidad de este, como ilustraremos en los ejemplos 2.2.1 y 2.2.2.

Además cuando se tiene que $P'(0, s) < P(1, 1-s)$ y $P'(0, 1-s) < P(1, s)$ nuevamente $G'(0), G'(1) < 0$ y también se garantizaría la existencia de un tercer punto de equilibrio inestable.

Ejemplo 2.2.1. $P(x, s) = s \left(\frac{x^2+x}{2} \right)$

La función $P(x, s) = s \left(\frac{x^2+x}{2} \right)$ (ver Figura 2.6) claramente cumple con las condiciones (AS 1), (AS 2) y (AS 3) de Abrams y Strogatz.

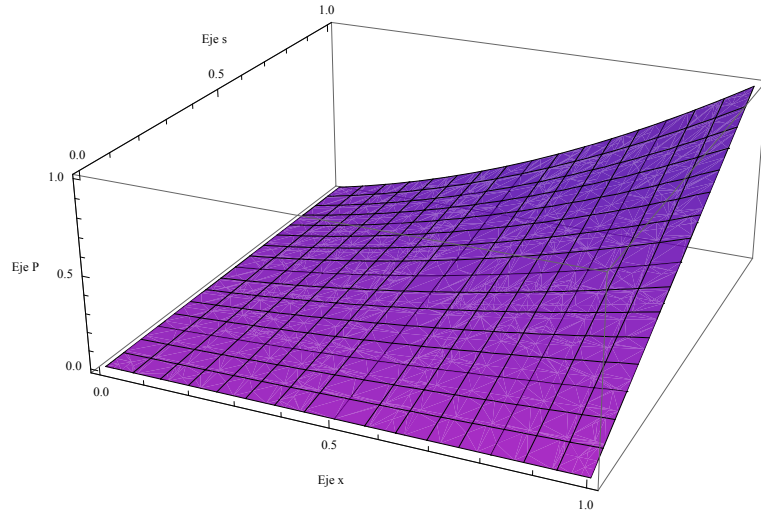


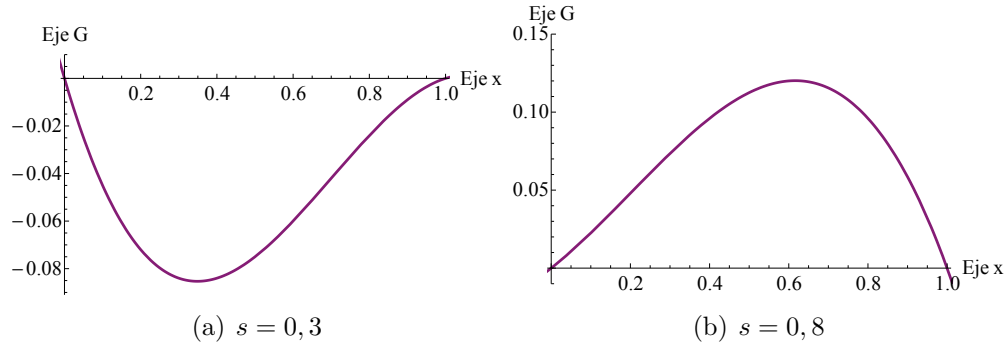
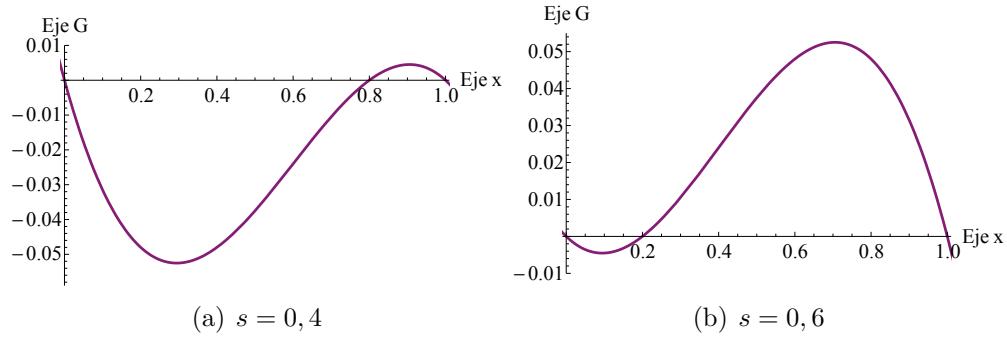
Figura 2.6: $P(x, s) = s \left(\frac{x^2+x}{2} \right); 0 < x, s < 1$

La ecuación diferencial asociada a esta nueva función de probabilidad está dada por

$$\frac{dx}{dt} = (1-x) \left(\frac{x^2+x}{2} \right) s - x \left(\frac{(1-x)^2 + (1-x)}{2} \right) (1-s). \quad (2.12)$$

Si $G(x) = (1-x) \left(\frac{x^2+x}{2} \right) s - x \left(\frac{(1-x)^2 + (1-x)}{2} \right) (1-s)$, los equilibrios de (2.12) corresponden a las raíces de la ecuación $G(x) = 0$, que se puede resolver fácilmente. Las soluciones son $x = 0$, $x = 1$ y $x = 2 - 3s$. Por lo tanto hay un tercer equilibrio en $[0, 1]$ si $0 < 2 - 3s < 1$, esto es, si $\frac{1}{3} < s < \frac{2}{3}$.

En la Figura 2.7 se observa que para $s = 0,3$ y $s = 0,8$ no existe un tercer punto de equilibrio pero en la Figura 2.8 se tiene que para $s = 0,4$ y $s = 0,6$ existe un tercer punto de equilibrio.

Figura 2.7: $G(x)$; $0 < x < 1$ Figura 2.8: $G(x)$; $0 < x < 1$

Ahora analizando la función de probabilidad $P(x, s)$ tenemos que $P'(x, s) = s \left(x + \frac{1}{2} \right)$. Adicionalmente puede verse que si $s \in [\frac{1}{3}, \frac{2}{3}]$, entonces

$$P'(0, s) < P(1, 1 - s)$$

$$P'(0, 1 - s) < P(1, s). \quad (2.13)$$

Condiciones que garantizan que este tercer punto de equilibrio es inestable ya que $G'(0) < 0$ y $G'(1) < 0$.

$G'(x)$ puede calcularse de manera explícita:

$$G'(x) = -\frac{x^2 + x}{2}s + (1 - x)\frac{2x + 1}{2}s - \frac{(1 - x)^2 + (1 - x)}{2}(1 - s) - \frac{3x + x^2}{2}(1 - s).$$

Verificando $G'(0)$ y $G'(1)$ en la anterior ecuación tenemos que $G'(0) = \frac{3s}{2} - 1 < 0$ y $G'(1) = s - 2 < 0$ y por el criterio de estabilidad (Teorema 1.2.1) $x = 0, 1$ son estables, adicionalmente $G'(x^*) = G'(2 - 3s) = \frac{1}{2}(2 - 3s)(-1 + 3s) > 0$ si $s \in [\frac{1}{3}, \frac{2}{3}]$ de manera que x^* es inestable. Sin embargo si $s \leq \frac{1}{3}$ o $s \geq \frac{2}{3}$, los únicos equilibrios son $x = 0$ y $x = 1$, uno de ellos será estable y el otro inestable, dependiendo de s .

Ejemplo 2.2.2. $P(x, s) = s \left(\frac{2x-x^2}{4} \right)$

La función de probabilidad $P(x, s) = s \left(\frac{2x-x^2}{4} \right)$ (ver Figura 2.9) nuevamente cumple con las condiciones **(AS 1)**, **(AS 2)** y **(AS 3)** de Abrams y Strogatz.

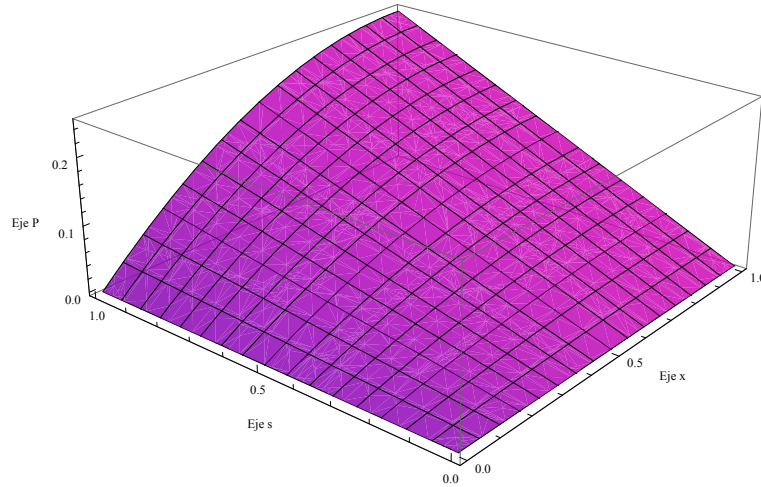


Figura 2.9: $P(x, s) = s \left(\frac{2x-x^2}{4} \right)$; $0 < x, s < 1$

La ecuación diferencial asociada a esta función de probabilidad está dada por

$$\frac{dx}{dt} = (1-x) \left(\frac{2x-x^2}{4} \right) s - x \left(\frac{2(1-x)-(1-x)^2}{4} \right) (1-s).$$

Si $G(x) = (1-x) \left(\frac{2x-x^2}{4} \right) s - x \left(\frac{2(1-x)-(1-x)^2}{4} \right) (1-s)$, los equilibrios de la anterior ecuación diferencial corresponden a las raíces de la ecuación $G(x) = 0$.

En la Figura 2.10 se observa que para $s = 0,2$ y $s = 0,8$ no existe un tercer punto de equilibrio, sin embargo en la Figura 2.11 para $s = 0,4$ y $s = 0,7$ claramente se observa un tercer punto de equilibrio.

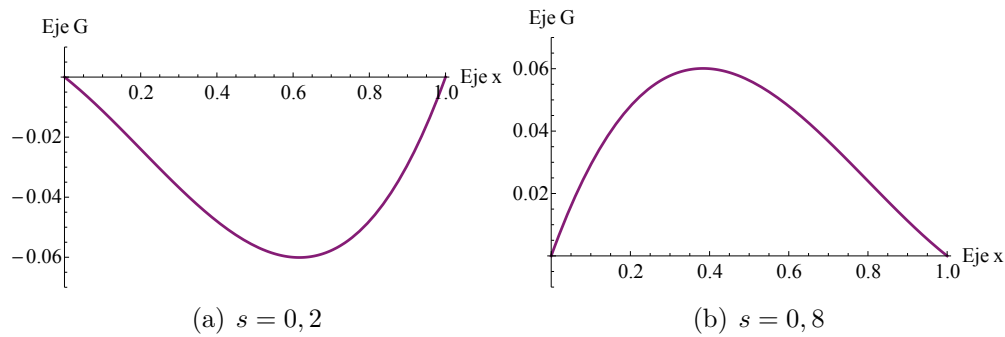
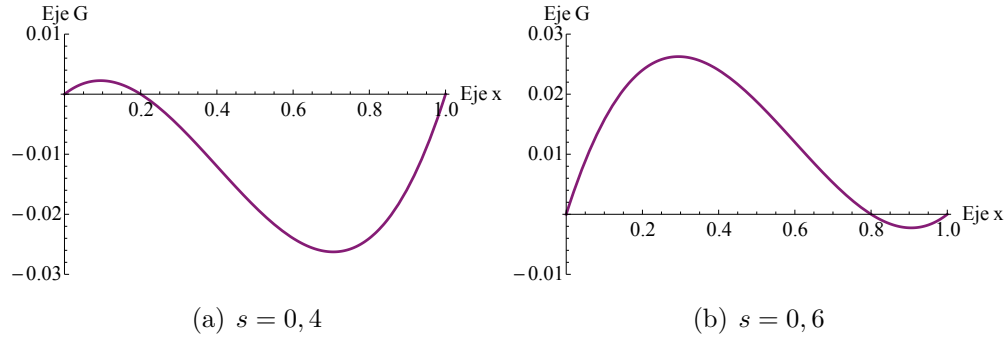


Figura 2.10: $G(x)$; $0 < x < 1$

Figura 2.11: $G(x)$; $0 < x < 1$

Resolviendo la ecuación $G(x) = 0$, podemos observar que

$$(1-x)x \left(\frac{s}{4}(2-x) - \frac{(1-s)}{4}(1+x) \right) = 0$$

los puntos $x = 0$ y $x = 1$ son puntos de equilibrio y adicionalmente existe un tercer punto de equilibrio x^* que se obtiene resolviendo

$$\frac{s}{4}(2-x^*) - \frac{(1-s)}{4}(1+x^*) = 0$$

$$x^* = 3s - 1.$$

El tercer punto de equilibrio x^* tiene sentido en el sistema si y solo si $0 < x^* < 1$ es decir que $1/3 < s < 2/3$, veamos ahora la estabilidad del punto de equilibrio x^* . En este caso

$$G'(x) = \frac{1-2x}{4}(3s-1-x) - \frac{1}{4}(x-x^2).$$

Verificando $G'(0)$ y $G'(1)$ en la anterior ecuación tenemos que $G'(0) = \frac{3s-1}{4} > 0$ y $G'(1) = \frac{-3s+2}{4} > 0$ y por el criterio de estabilidad (Teorema 1.2.1) $x = 0, 1$ son inestables si $s \in [\frac{1}{3}, \frac{2}{3}]$. De otro lado $G'(x^*) = G'(3s-1) = \frac{1}{4}(3s-2)(3s-1) < 0$ y por lo tanto x^* es estable.

Así, con el ejemplo 2.2.2 concluimos que la existencia de un tercer punto equilibrio x^* estable si se puede dar para ciertas funciones de probabilidad P que satisfacen las condiciones de Abrams y Strogatz pero no la condición $P'(0, s) = 0$ y para algunos valores de $s \in [0, 1]$, obteniendo como resultado la posibilidad de la coexistencia de los dos idiomas en competencia.

Capítulo 3

Modelo de Mira y Paredes

Los autores Mira y Paredes en [12] observan que de acuerdo al modelo de Abrams y Strogatz en donde los hablantes son monolingües la coexistencia de dos idiomas es imposible.

Sin embargo al analizar situaciones como la de Galicia (noroeste de España), en donde se da la competencia de los idiomas gallego y castellano, se observa la existencia de una mayoría bilingüe junto a minorías monolingües del gallego y castellano, algo que no sucede con idiomas como el quechua y el español. A diferencia de lo que ocurre en los ejemplos estudiados por Abrams y Strogatz, el gallego y el español han coexistido históricamente sin que ninguno de los dos de muestra de estar extinguiéndose.

Situaciones como esta conducen a Mira y a Paredes a reflexionar sobre la importancia que tiene la similitud de la gramática y el vocabulario correspondiente a cada uno de los idiomas al momento de aprender uno de estos, cuando el otro es conocido, lo que facilita la existencia de grupos bilingües. A su vez la existencia del bilingüismo posibilitaría la supervivencia de dos idiomas.

3.1. Similitud y coexistencia de idiomas

Mira y Paredes introducen un nuevo modelo tomando como base el modelo de Abrams y Strogatz (2.1). Nuevamente la población T se considera constante, sin estructura espacial o social, denotamos X , Y y B a las poblaciones de hablantes que son monolingües del idioma X , monolingües del idioma Y y bilingües de los idiomas X y Y respectivamente.

Así $X + Y + B = T$, normalizando tenemos que $x + y + b = 1$, donde x es la fracción de la población que habla X , y es la fracción de la población que habla Y y b es la fracción de la población que se considera bilingüe.

El parámetro de estatus o prestigio s se le otorga a cada idioma y se normaliza de manera que si s_X es el prestigio del idioma X y s_Y es el prestigio del idioma Y se tiene

que $s_X + s_Y = 1$.

Además si la probabilidad por unidad de tiempo de que un individuo que habla X se pase a hablar Y , está dada por $P_{XY}(y + b, s_y)$, la probabilidad por unidad de tiempo de que un individuo que habla Y se pase a hablar X , está dada por $P_{YX}(x + b, s_x)$, la probabilidad por unidad de tiempo de que un individuo que habla X sin olvidar su idioma quiera hablar Y , está dada por $P_{XB}(b + y, s_y)$, la probabilidad por unidad de tiempo de que un individuo que habla Y sin olvidar su idioma quiera hablar X , está dada por $P_{YB}(b + x, s_x)$, la probabilidad por unidad de tiempo de que un individuo que habla X y Y se pase hablar solamente X , está dada por $P_{BX}(x + b, s_x)$ y la probabilidad por unidad de tiempo de que un individuo que habla X y Y se pase hablar solamente Y , está dada por $P_{BY}(y + b, s_y)$, entonces con estas hipótesis el modelo de Mira y Paredes queda expresado con el siguiente sistema

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = yP_{YX}(x + b, s_x) + bP_{BX}(x + b, s_x) - x(P_{XY}(y + b, s_y) + P_{XB}(b + y, s_y)) \\ \frac{dy}{dt} = xP_{XY}(y + b, s_y) + bP_{BY}(y + b, s_y) - y(P_{YX}(x + b, s_x) + P_{YB}(b + x, s_x)) \\ \frac{db}{dt} = xP_{XB}(b + y, s_y) + yP_{YB}(b + x, s_x) - b(P_{BX}(x + b, s_x) + P_{BY}(y + b, s_y)). \end{cases} \quad (3.1)$$

Como $x + y + b = 1$ entonces se tiene que $\frac{db}{dt} = -\frac{dx}{dt} - \frac{dy}{dt}$, por lo tanto el sistema (3.1) se puede simplificar a estudiar las siguientes dos ecuaciones diferenciales

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = yP_{YX}(x + b, s_x) + bP_{BX}(x + b, s_x) - x(P_{XY}(y + b, s_y) + P_{XB}(b + y, s_y)) \\ \frac{dy}{dt} = xP_{XY}(y + b, s_y) + bP_{BY}(y + b, s_y) - y(P_{YX}(x + b, s_x) + P_{YB}(b + x, s_x)) \end{cases} \quad (3.2)$$

donde $b = 1 - x - y$.

Además, para Mira y Paredes, pasar de B a X es igual que pasar de Y a X , es decir, $P_{BX} = P_{YX}$ y análogamente se tiene que $P_{BY} = P_{XY}$. Teniendo en cuenta que $b = 1 - x - y$ y que $s_y = 1 - s_x$, reparametrizando con $s = s_x$, el sistema (3.2) finalmente se puede escribir como

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = (1 - x)P_{YX}(1 - y, s) - x(P_{XY}(1 - x, 1 - s) + P_{XB}(1 - x, 1 - s)) \\ \frac{dy}{dt} = (1 - y)P_{XY}(1 - x, 1 - s) - y(P_{YX}(1 - y, s) + P_{YB}(1 - y, s)). \end{cases} \quad (3.3)$$

En el sistema (3.3) nuevamente se espera que las funciones P_{XY} , P_{XB} , P_{YX} y P_{YB} satisfagan las condiciones **(AS 1)**, **(AS 2)** y **(AS 3)** que fueron expuestas en el capítulo anterior.

Funciones de probabilidad P_{XY} , P_{XB} , P_{YX} y P_{YB}

Mira y Paredes en [12] toman la idea de la función de probabilidad que construyen Abrams y Strogatz (2.4) pero introducen un nuevo parámetro, $k \in [0, 1]$, que refleja la similitud de los idiomas.

Así, Mira y Paredes consideran las familias de funciones de probabilidad dadas por

$$P(u, v) = c(1 - k)vu^a$$

$$Q(u, v) = ckvu^a,$$

que satisfacen las condiciones **(AS 1)**, **(AS 2)** y **(AS 3)** siempre y cuando $k, s \in [0, 1]$ y a, c sean constantes positivas con $a \geq 1$.

Teniendo en cuenta que no hay estructura social o espacial de los distintos grupos de hablantes, Mira y Paredes toman

$$P_{XY} = P_{YX} = P$$

$$P_{XB} = P_{YB} = Q.$$

El parámetro $k = 0$ representa situaciones donde la conversación entre los hablantes monolingües es imposible, que corresponden al modelo de Abrams y Strogatz, y $k = 1$ significa que los idiomas X y Y son idénticos.

3.2. Equilibrios y estabilidad

El sistema de ecuaciones diferenciales (3.3) queda escrito con las funciones de probabilidad P y Q como:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = (1 - x)c(1 - k)s(1 - y)^a - x(c(1 - k)(1 - s)(1 - x)^a + ck(1 - s)(1 - x)^a) \\ \frac{dy}{dt} = (1 - y)c(1 - k)(1 - s)(1 - x)^a - y(c(1 - k)s(1 - y)^a + cks(1 - y)^a). \end{cases} \quad (3.4)$$

Finalmente haciendo $t = \beta\tau$ se tiene que

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = \frac{dx}{d\tau} \frac{d\tau}{dt} = \frac{1}{\beta} \frac{dx}{d\tau} \\ \frac{dy}{dt} = \frac{dy}{d\tau} \frac{d\tau}{dt} = \frac{1}{\beta} \frac{dy}{d\tau}, \end{cases}$$

reemplazando en (3.4) obtenemos

$$\begin{cases} \frac{dx}{d\tau} = \beta c((1 - x)(1 - k)s(1 - y)^a - x(1 - s)(1 - x)^a) \\ \frac{dy}{d\tau} = \beta c((1 - y)(1 - k)(1 - s)(1 - x)^a - ys(1 - y)^a). \end{cases}$$

Luego si $\beta c = 1$, y reescribiendo nuevamente al final $t = \tau$ sin pérdida de generalidad obtenemos el sistema con el cual estudiaremos el comportamiento de (3.1)

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = (1-x)(1-k)s(1-y)^a - x(1-s)(1-x)^a \\ \frac{dy}{dt} = (1-y)(1-k)(1-s)(1-x)^a - ys(1-y)^a. \end{cases} \quad (3.5)$$

Claramente si $k = 0$ y $b = 0$ el sistema (3.5) se reduciría al sistema de Abrams y Strogatz ya estudiado en el capítulo 2.

3.2.1. Puntos de equilibrio

Los equilibrios de (3.5) se encuentran haciendo $\frac{dx}{dt} = \frac{dy}{dt} = 0$, así se tiene que

$$\begin{cases} (1-x)(1-k)s(1-y)^a - x(1-s)(1-x)^a = 0 \\ (1-y)(1-k)(1-s)(1-x)^a - ys(1-y)^a = 0. \end{cases} \quad (3.6)$$

Además, por las condiciones impuestas al principio de la descripción del modelo, teníamos que $x + y + b = 1$ lo que equivale a $x + y = 1 - b$, pero $1 - b \leq 1$ pues $b \geq 0$, así todo (x, y) del modelo debe satisfacer $x + y \leq 1$.

Es fácil ver que $(x, y) = (1, 0)$, $(x, y) = (0, 1)$ y $(x, y) = (1, 1)$ son soluciones inmediatas de (3.6), sin embargo para el modelo $(x, y) = (1, 1)$ no es un punto de equilibrio ya que no cumple con la condición $x + y \leq 1$.

Buscando más soluciones, que no sean triviales, resolvemos el sistema (3.6). Nótese que podemos suponer $x \neq 0$, $y \neq 0$, $x \neq 1$ y $y \neq 1$ de manera que (3.6) conduce a las ecuaciones

$$(1-y)^a = \frac{1-s}{s(1-k)}x(1-x)^{a-1} \quad (3.7)$$

$$(1-x)^a = \frac{s}{(1-s)(1-k)}y(1-y)^{a-1}. \quad (3.8)$$

Multiplicando la ecuación (3.7) con (3.8) y despejando y se llega a

$$\begin{aligned} (1-y)^a(1-x)^a &= \frac{1}{(1-k)^2}x(1-x)^{a-1}y(1-y)^{a-1} \\ \frac{1-y}{y} &= \frac{x}{(1-k)^2(1-x)} \\ y &= \frac{(1-k)^2(1-x)}{x + (1-k)^2(1-x)}. \end{aligned} \quad (3.9)$$

Así reemplazando (3.9) en (3.8) tenemos que

$$(1-x)^a = \frac{s(1-k)^2(1-x)}{(1-s)(1-k)(x+(1-k)^2(1-x))} \left(\frac{x}{x+(1-k)^2(1-x)} \right)^{a-1}.$$

Simplificando la anterior ecuación obtenemos finalmente

$$\left(\frac{1-x}{x} \right)^{a-1} (x+(1-k)^2(1-x))^a = \frac{s(1-k)}{(1-s)}. \quad (3.10)$$

Observemos que de la ecuación (3.10) no es posible en general encontrar explícitamente el valor de x . En conclusión si existen más puntos de equilibrio, digamos (x^*, y^*) , entonces estos deben satisfacer las ecuaciones (3.9) y (3.10).

Sin embargo de la ecuación (3.10) podemos definir la función G como sigue

$$G(x) = \left(\frac{1-x}{x} \right)^{a-1} (x+(1-k)^2(1-x))^a \quad (3.11)$$

con la cual estudiaremos las posibles soluciones de (3.10) que corresponden a los valores de x que satisfacen

$$G(x) = \frac{s(1-k)}{(1-s)}. \quad (3.12)$$

El comportamiento de G varía de acuerdo del parámetro a . Vamos a distinguir tres casos: $a = 1$, $a > 1$ y $a < 1$.

Análisis de equilibrios cuando $a = 1$

Si el parámetro a es igual a 1 entonces $G(x) = x + (1-k)^2(1-x)$, así (3.12) puede resolverse explícitamente, dando lugar a la solución

$$x^* = \frac{s(1-k) - (1-s)(1-k)^2}{(1-s)k(2-k)}. \quad (3.13)$$

Reemplazando (3.13) en (3.9) llegamos al correspondiente y^* ,

$$y^* = \frac{(1-k)(1-s(2-k))}{sk(2-k)}. \quad (3.14)$$

Por lo tanto de (3.13) y (3.14) tenemos nuestro tercer punto de equilibrio, (x^*, y^*) , de manera explícita. Sin embargo este punto solo tiene sentido en el modelo de Mira y Paredes si $x^* + y^* \leq 1$.

Así tenemos de lo anterior que si $x^* + y^* \leq 1$ entonces los parámetros s y k deben satisfacer

$$\frac{s(1-k) - (1-s)(1-k)^2}{(1-s)k(2-k)} + \frac{(1-k)(1-s(2-k))}{sk(2-k)} \leq 1,$$

lo cual equivale a la siguiente desigualdad

$$\frac{(1 - k(1 - s) - 2s)(1 - s(2 - k))}{(2 - k)k(1 - s)s} \leq 0,$$

y debido a que $(2 - k)k(1 - s)s$ es siempre positivo entonces para encontrar los valores que deben tomar s y k para satisfacer la expresión anterior basta con estudiar la desigualdad

$$(1 - k(1 - s) - 2s)(1 - s(2 - k)) \leq 0. \quad (3.15)$$

Resolviendo la desigualdad (3.15) se llega a que el conjunto solución, M , corresponde al siguiente conjunto:

$$M = \left\{ (s, k) : k \geq 1 - \frac{s}{1 - s} \wedge k \geq 2 - \frac{1}{s} \right\} \cup \left\{ (s, k) : k \leq 1 - \frac{s}{1 - s} \wedge k \leq 2 - \frac{1}{s} \right\}.$$

Sin embargo debido a que $s, k \in [0, 1]$ tenemos que el conjunto solución, M se reduce a la región que se muestra en la Figura 3.1 que corresponde al conjunto

$$R = \left\{ (s, k) : k \geq 1 - \frac{s}{1 - s} \wedge k \geq 2 - \frac{1}{s} \right\}.$$

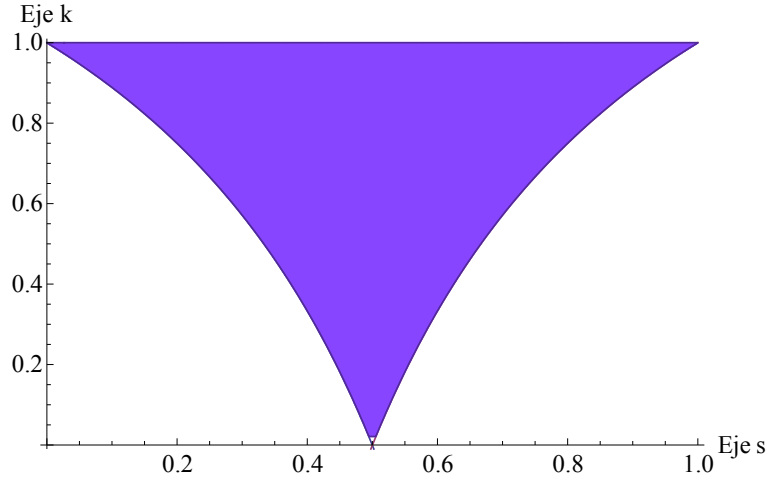


Figura 3.1: Región, R , que corresponde a los s, k para los cuales $x^* + y^* \leq 1$ y $x^*, y^* \geq 0$

Así tenemos por ejemplo que para los valores $s = 0,6$, $k = 0,4$, que pertenecen a la región mostrada anteriormente, existe solución de (3.12) como se muestra en la Figura 3.2 y además $x^* \approx 0,84375$, $y^* \approx 0,0625$ cumplen $x^* + y^* \leq 1$.

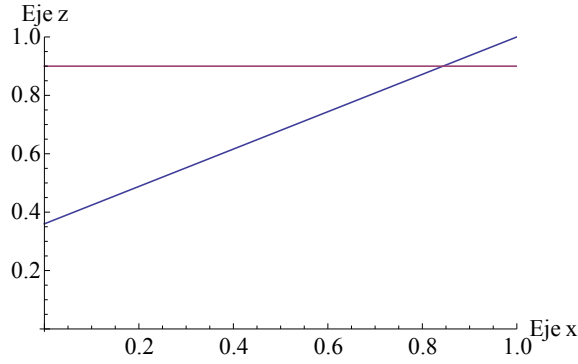


Figura 3.2: Intersección de las rectas $z = G(x)$ y $z = \frac{s(1-k)}{(1-s)}$, para $s = 0,6$ y $k = 0,4$

Por otro lado en la Figura 3.3 tenemos por ejemplo que para los valores $s = 0,7$, $k = 0,2$ existe solución de (3.12) pero claramente estos valores no pertenecen a la región de la Figura 3.1, es decir que no satisface las condiciones del modelo de Mira y Paredes, además verificando $x^* \approx 3,40741$, $y^* \approx -0,825397$ no cumplen $x^* + y^* \leq 1$.

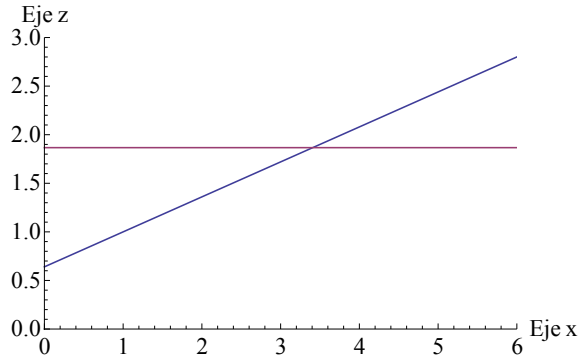


Figura 3.3: Intersección de las rectas $z = G(x)$ y $z = \frac{s(1-k)}{(1-s)}$, para $s = 0,7$ y $k = 0,2$

Análisis de equilibrios cuando $a > 1$

Para estudiar las soluciones de la ecuación (3.12) es necesario analizar el comportamiento de la función $G(x)$ dada por (3.11).

Debido a que $a > 1$ se tiene que

$$\begin{cases} G(x) > 0, & \text{para todo } x \in (0, 1) \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} G(x) = +\infty \\ G(1) = 0. \end{cases} \quad (3.16)$$

Además como $\frac{s(1-k)}{(1-s)} > 0$, siempre que $s, k \in (0, 1)$, entonces teniendo en cuenta (3.16) siempre existe al menos una solución de (3.12). Analizando más a fondo la función

G encontramos su derivada para ver si existen máximos o mínimos relativos que nos den en forma más precisa el aspecto de la gráfica de G .

Así derivando la función G respecto a x tenemos que

$$G'(x) = (1-a) \left(\frac{1-x}{x} \right)^{a-2} \frac{1}{x^2} (x + (1-k)^2(1-x))^a \\ + \left(\frac{1-x}{x} \right)^{a-1} a(x + (1-k)^2(1-x))^{a-1} (1 - (1-k)^2),$$

reescribiendo la función $G'(x)$, tenemos que $G'(x)$ queda expresada como la multiplicación de tres factores, como sigue

$$G'(x) = \frac{(x + (1-k)^2(1-x))^{a-1}}{x^2} \left(\frac{1-x}{x} \right)^{a-2} \\ ((1-a)(x + (1-k)^2(1-x)) + ax(1-x)(1 - (1-k)^2)). \quad (3.17)$$

Por lo tanto estudiar el signo de la función $G'(x)$ corresponde a estudiar el comportamiento del último factor ya que los dos primeros son siempre positivos en $(0, 1)$. Así si $G'(x) = 0$ entonces la expresión a estudiar se reduciría a

$$(1-a)(x + (1-k)^2(1-x)) + ax(1-x)(1 - (1-k)^2) = 0.$$

Lo anterior ecuación corresponde a la ecuación cuadrática

$$ak(k-2)x^2 + k(2-k)x + (1-a)(1-k)^2 = 0,$$

que tiene las soluciones

$$x_{\pm} = \frac{1}{2a} \left(1 \pm \sqrt{1 - \frac{4a(a-1)(1-k)^2}{k(2-k)}} \right). \quad (3.18)$$

Nos interesa el caso en que estas soluciones son reales y distintas, esto es cuando $k(2-k) - 4a(a-1)(1-k)^2 > 0$ que corresponde a los parámetros a y k que pertenecen la región de la Figura 3.4.

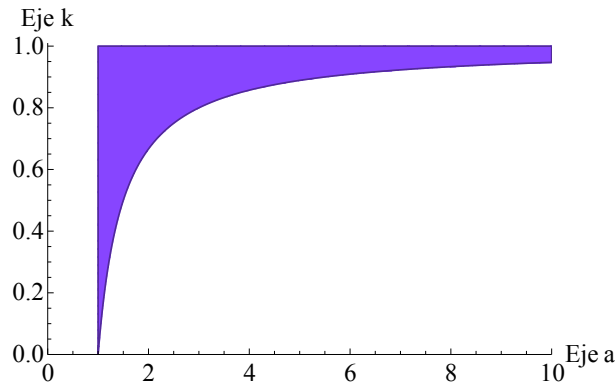


Figura 3.4: Región que corresponde a los a, k que satisfacen $k(2-k) - 4a(a-1)(1-k)^2 > 0$

Nótese que en esas circunstancias $x_{\pm} \in (0, 1)$ ya que

$$x_+ < \frac{1}{a} < 1,$$

$$x_- < \frac{1}{2a} < 1.$$

En este caso, teniendo en cuenta (3.16) y dependiendo de los valores de s y k , la ecuación (3.12) puede tener exactamente una, dos o tres soluciones. En efecto, si definimos $I = [G(x_-), G(x_+)]$ distinguimos los casos siguientes.

1. si $\frac{s(1-k)}{1-s} \notin I$ entonces sólo existe una solución.
2. si $\frac{s(1-k)}{1-s} \in I$ entonces existen exactamente tres soluciones.
3. si $\frac{s(1-k)}{1-s} = G(x_-)$ ó $\frac{s(1-k)}{1-s} = G(x_+)$ entonces existen exactamente dos soluciones.

La discusión anterior nos permite obtener una cota en el número de equilibrios del modelo de Mira y Paredes (3.5).

Teorema 3.2.1. *El modelo de Mira y Paredes, cuando el parámetro $a > 1$, admite como máximo tres equilibrios aparte de $(0, 1)$ y $(1, 0)$.*

Sin embargo nuevamente tenemos el mismo problema respecto a si la o las soluciones satisfacen la condición $x^* + y^* \leq 1$, lo cual es mucho más complicado comprobar analíticamente con los resultados obtenidos para este caso. Ilustramos a continuación algunos casos correspondientes a valores específicos de los parámetros.

Ejemplo 3.2.1.

Cuando $a = 2$, $s = 0,5$, $k = 0,8$ y $a = 1,3$, $s = 0,4$, $k = 0,7$ se puede verificar la existencia de las tres soluciones de (3.12), como se muestra en la Figura 3.5, con los $x^* \in (0, 1)$. Numéricamente se puede comprobar que los x^* y y^* correspondientes a estos parámetros dados satisfacen que $x^* + y^* \leq 1$.

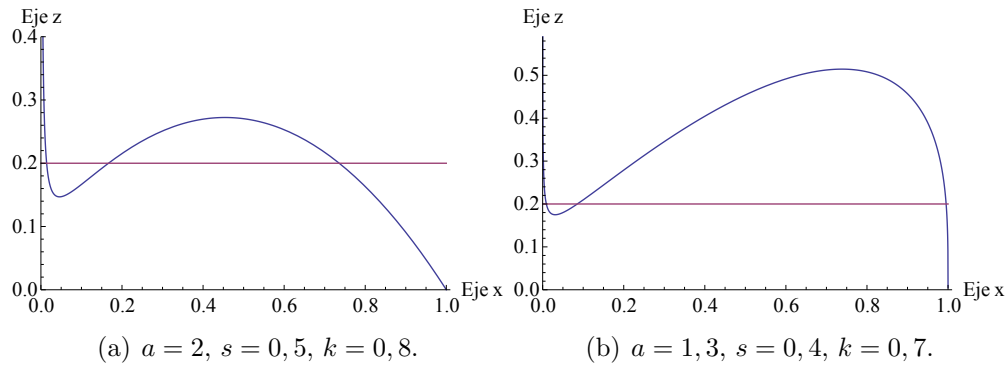


Figura 3.5: Intersección de las funciones $z = G(x)$ y $z = \frac{s(1-k)}{(1-s)}$

Ejemplo 3.2.2.

Ahora si $a = 3$, $s = 0,7$, $k = 0,4$ solamente existe una solución de (3.12), ver la Figura 3.6, con el $x^* \in (0, 1)$, además numéricamente se encuentra que $x^* \approx 0,235874$, $y^* \approx 0,53837$. Análogamente cuando $a = 1,4$, $s = 0,3$, $k = 0,2$ también existe una solución de (3.12), ver la Figura 3.6, numéricamente $x^* \approx 0,930006$, $y^* \approx 0,0459541$.

En ambos casos $x^* + y^* \leq 1$, por lo tanto con estos parámetros concluimos que (x^*, y^*) son equilibrios del respectivo modelo de Mira y Paredes.

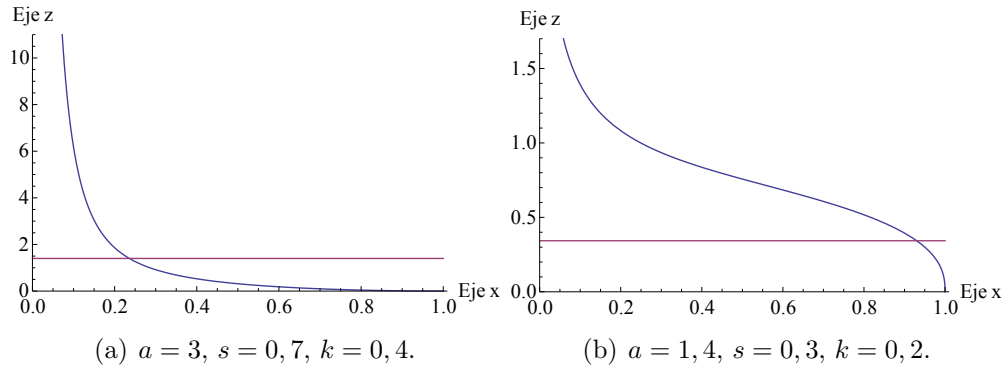


Figura 3.6: Intersección de las funciones $z = G(x)$ y $z = \frac{s(1-k)}{(1-s)}$

Análisis de equilibrios cuando $a < 1$

Cuando $a < 1$ la función (3.11) satisface las siguientes conclusiones

$$\begin{cases} G(x) > 0, & \text{para todo } x \in (0, 1) \\ \lim_{x \rightarrow 1^-} G(x) = +\infty \\ G(0) = 0. \end{cases} \quad (3.19)$$

Así para estudiar el comportamiento de G y ver qué soluciones satisfacen (3.12), debemos hacer un análisis análogo al anteriormente hecho. Sin embargo como $\frac{s(1-k)}{(1-s)} > 0$, siempre que $s, k \in (0, 1)$ entonces por los argumentos (3.19) siempre existe al menos una solución de (3.12).

Por lo tanto tenemos la existencia de una solución matemática que puede que tenga sentido en el modelo de Mira y Paredes. En la Figura 3.7 observamos cómo para los parámetros $a = 0,4$, $s = 0,3$, $k = 0,7$ y $a = 0,1$, $s = 0,8$, $k = 0,3$ existe solución de (3.12) en donde $x^* \approx 0,0944539$, $y^* \approx 0,463187$ y $x^* \approx 0,761053$, $y^* \approx 0,133332$ respectivamente satisfacen que $x^* + y^* \leq 1$.

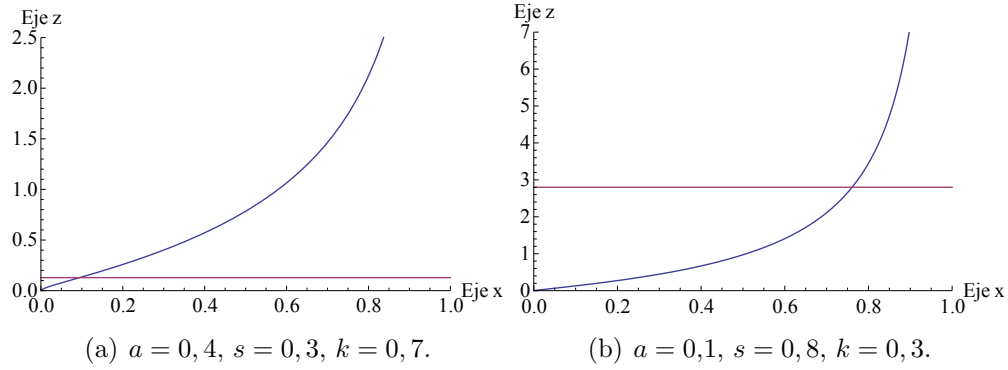


Figura 3.7: Intersección de las funciones $z = G(x)$ y $z = \frac{s(1-k)}{(1-s)}$

Sin embargo este caso no es de nuestro mayor interés ya que para $a < 1$ las funciones de probabilidad no cumplirían la condición **(AS 3)** que Mira y Paredes toman del modelo de Abrams y Strogatz.

Nulclinas del sistema

Vale la pena resaltar que todo el análisis y los resultados encontrados anteriormente acerca de la existencia de los puntos de equilibrio en el modelo de Mira y Paredes también puede estudiarse a partir del estudio de las curvas nulclinas del sistema. Por lo tanto haremos un pequeño análisis del comportamiento de las curvas nulclinas del sistema (3.5).

Cuando $\frac{dx}{dt} = 0$ tenemos que las x -nulclinas serán

$$\begin{cases} x = 1 \\ y(x) = 1 - \gamma x^{1/a} (1-x)^{1-1/a}, \quad \gamma = \left(\frac{1-s}{s(1-k)} \right)^{1/a} > 0. \end{cases} \quad (3.20)$$

Además cuando $\frac{dy}{dt} = 0$ tenemos que las y -nulclinas serán

$$\begin{cases} y = 1 \\ x(y) = 1 - \mu y^{1/a} (1-y)^{1-1/a}, \quad \mu = \left(\frac{s}{(1-s)(1-k)} \right)^{1/a} > 0. \end{cases} \quad (3.21)$$

Las curvas definidas en (3.20) y (3.21), que corresponden a las curvas nulclinas del sistema, las estudiaremos para el caso $a > 1$. Así analizando las funciones $y(x)$ y $x(y)$

de (3.20) y (3.21) respectivamente tenemos que sus derivadas son

$$\begin{cases} y'(x) = -\frac{\gamma}{a} \left(\frac{x}{1-x} \right)^{1/a} \left(\frac{1-x}{x} - a + 1 \right), \\ x'(y) = -\frac{\mu}{a} \left(\frac{y}{1-y} \right)^{1/a} \left(\frac{1-y}{y} - a + 1 \right), \end{cases}$$

de las cuales se puede verificar fácilmente que cada curva nulclina tiene un solo punto crítico en $x = 1/a$ para $y(x)$ y en $y = 1/a$ para $x(y)$.

Por lo tanto la x -nulclina del sistema, $y(x)$, alcanza su mínimo en $x = 1/a$ ya que $y'(x)$ es negativa cuando $x < 1/a$ y es positiva cuando $x > 1/a$ y la y -nulclina del sistema, $x(y)$, alcanza su mínimo en $y = 1/a$ ya que $x'(y)$ es negativa cuando $y < 1/a$ y es positiva cuando $y > 1/a$. Además, $y(0) = x(0) = 1$ y $y(1) = x(1) = 1$.

Graficando observamos entonces que siempre las curvas se intersectan en $(0, 1)$, $(1, 0)$ y $(1, 1)$ pero además para ciertos valores de a , k y s se obtienen hasta los tres puntos de equilibrio que afirma el Teorema 3.2.1 (ver Figura 3.8).

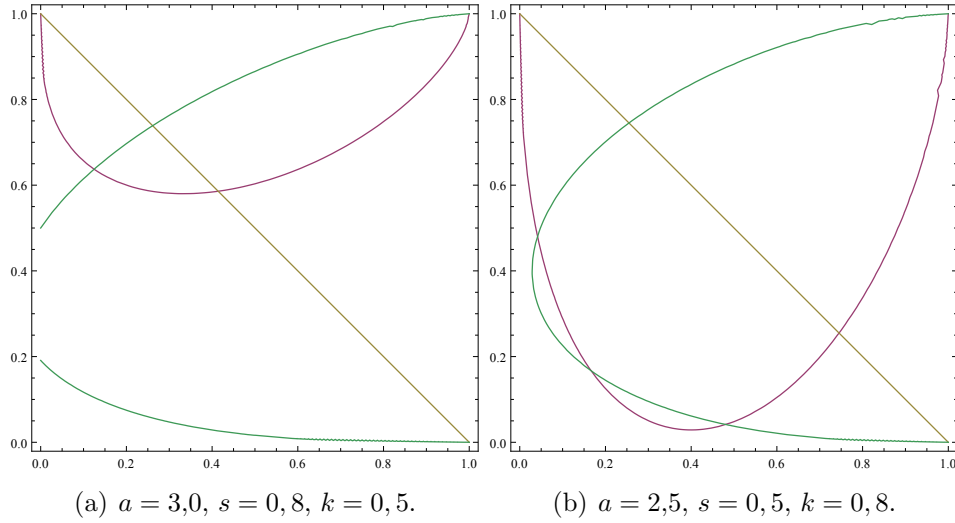


Figura 3.8: Intersección de las x -nuclinas y y -nuclinas de (3.5)

3.2.2. Estabilidad de los puntos de equilibrio

Para estudiar la estabilidad de los puntos de equilibrio encontrados en la subsección 3.2.1 es necesario utilizar la técnica de linealización estudiada en la sección 1.2.

Así de (3.5) tomemos F como sigue

$$F(x, y) = \begin{pmatrix} (1-x)(1-k)s(1-y)^a - x(1-s)(1-x)^a \\ (1-y)(1-k)(1-s)(1-x)^a - ys(1-y)^a \end{pmatrix}$$

La matriz de linealización de F está dada por

$$DF(x, y) = \begin{pmatrix} -(1-k)s(1-y)^a - (1-s)(1-x)^a & -a(1-x)(1-k)s(1-y)^{a-1} \\ +ax(1-s)(1-x)^{a-1} & \\ -a(1-y)(1-k)(1-s)(1-x)^{a-1} & -(1-k)(1-s)(1-x)^a - s(1-y)^a \\ +ays(1-y)^{a-1} & \end{pmatrix}. \quad (3.22)$$

Luego evaluando $(x, y) = (1, 0)$ en la matriz (3.22) tenemos que

$$DF(1, 0) = \begin{pmatrix} -(1-k)s & 0 \\ 0 & -s \end{pmatrix}.$$

y los valores propios correspondientes serían $\lambda_1 = -(1-k)s$ y $\lambda_2 = -s$ que son negativos, es decir $\lambda_1, \lambda_2 < 0$, luego $(x, y) = (1, 0)$ es un punto de equilibrio estable.

Análogamente evaluando $(x, y) = (0, 1)$ en la matriz (3.22) tenemos que

$$DF(0, 1) = \begin{pmatrix} -(1-s) & 0 \\ 0 & -(1-k)(1-s) \end{pmatrix}.$$

Por lo tanto los valores propios correspondientes son $\lambda_1 = -(1-s)$ y $\lambda_2 = -(1-k)(1-s)$ que son negativos, es decir $\lambda_1, \lambda_2 < 0$, así $(x, y) = (0, 1)$ es un punto de equilibrio estable.

El estudio de la estabilidad para los puntos de equilibrio encontrados adicionalmente dependiendo del valor que toma el parámetro a , no se realizará en general debido a la falta de información explícita de estos, solo se estudiará el caso más sencillo $a = 1$.

Análisis de estabilidad cuando $a = 1$

Cuando hacemos $a = 1$ la matriz de linealización (3.22) estará dada por

$$DF(x, y) = \begin{pmatrix} -(1-k)s(1-y) - (1-s)(1-x) & -(1-x)(1-k)s \\ +x(1-s) & \\ -(1-y)(1-k)(1-s) & -(1-k)(1-s)(1-x) - s(1-y) \\ +ys & \end{pmatrix}.$$

Luego si reemplazamos (x^*, y^*) , obtenidos de las ecuaciones (3.13) y (3.14), en la matriz anterior y simplificando tenemos

$$DF(x^*, y^*) = \begin{pmatrix} \frac{s(1-k) - (1-s)}{k(2-k)} & \frac{s(1-k)s(1-k) - (1-s)}{(1-s)k(2-k)} \\ \frac{(1-s)(1-k)(1-k) - s(2-k)}{s} & \frac{(1-k) - s(2-k)}{k(2-k)} \end{pmatrix}.$$

La anterior matriz se puede ver también como

$$DF(x^*, y^*) = \begin{pmatrix} \alpha & \frac{s(1-k)}{(1-s)}\alpha \\ \frac{(1-s)(1-k)}{s}\beta & \beta \end{pmatrix},$$

donde α y β son

$$\alpha = \alpha(s, k) = \frac{s(1-k) - (1-s)}{k(2-k)}$$

$$\beta = \beta(s, k) = \frac{(1-k) - s(2-k)}{k(2-k)}.$$

Como la matriz $DF(x^*, y^*)$ es 2×2 entonces por la sección 1.3 tenemos que sus correspondientes valores propios son como sigue

$$\lambda_{\pm} = \frac{1}{2} \left((\alpha + \beta) \pm \sqrt{(\alpha + \beta)^2 - 4\alpha\beta k(2-k)} \right) \quad (3.23)$$

Debido a que encontrar el signo de λ_{\pm} directamente de la ecuación (3.23) no es tan fácil entonces recordemos que en general la traza y el determinante de una matriz A , como la del sistema (1.9), en términos de los valores propios son respectivamente $\tau = \lambda_+ + \lambda_-$ y $\delta = \lambda_+ \lambda_-$.

Así encontrando y simplificando τ y δ de la matriz $DF(x^*, y^*)$ llegamos a que

$$\begin{aligned} \tau &= \alpha + \beta \\ \delta &= \alpha\beta k(2-k). \end{aligned}$$

Resolviendo $\alpha + \beta$, tenemos que $\tau = \lambda_+ + \lambda_- < 0$ ya que efectivamente

$$\alpha + \beta = \frac{-1}{2-k} < 0.$$

Por otro lado para encontrar el signo de δ debemos analizar el factor $\alpha\beta$ ya que sabemos que siempre $k(2-k) > 0$. Luego simplificando tenemos que

$$\alpha\beta = \frac{-(1-k(1-s)-2s)(1-s(2-k))}{(2-k)^2 k^2},$$

lo cual con ayuda de la ecuación (3.15) podemos determinar que $\alpha\beta \geq 0$ si s y k pertenecen a la región R ilustrada en la Figura 3.1.

En conclusión $\tau = \lambda_+ + \lambda_- < 0$ y $\delta = \lambda_+ \lambda_- > 0$, por lo tanto $\lambda_+, \lambda_- < 0$ y el punto de equilibrio (x^*, y^*) es siempre estable en el modelo de Mira y Paredes. Por lo tanto tenemos la siguiente proposición:

Proposición 3.2.1. *En el modelo de Mira y Paredes (3.5) si $a = 1$ y los parámetros (s, k) pertenecen a la región R descrita por las desigualdades*

$$k \geq \frac{1-2s}{1-s} \quad y \quad k \geq \frac{2s-1}{s}$$

entonces existen exactamente tres equilibrios en la región $\{(x, y) : x \geq 0, y \geq 0, x + y \leq 1\}$. Adicionalmente los tres equilibrios son estables y están situados en los puntos $(1, 0)$, $(0, 1)$ y (x^, y^*) , con x^*, y^* dados por (3.13) y (3.14) respectivamente.*

Capítulo 4

Aplicación del modelo de Abrams y Strogatz en Colombia

Abrams y Strogatz validaron su modelo mediante la recolección de series de datos que muestran la evolución del número de hablantes de varias lenguas, en distintas regiones del mundo. En muchos casos esta evolución coincide sorprendentemente bien con el modelo matemático propuesto en [1]. Conocer si un idioma sigue el modelo de Abrams y Strogatz puede ser importante para tomar medidas que puedan evitar su posible desaparición. Por lo tanto para finalizar este trabajo nos interesamos en aplicar este modelo a algunas de las poblaciones colombianas que se caracterizan por tener su propio idioma.

Colombia es considerado un país pluriétnico y multilingüe, según el Departamento Administrativo Nacional de Estadística – DANE (ver por ejemplo [2]), en el cual se reconocen cuatro grupos étnicos: la población Indígena, la población Raizal del Archipiélago de San Andrés, Providencia y Santa Catalina, la población negra o afrocolombiana de la que hacen parte la población Palenquera de San Basilio de Palenque del municipio de Mahates en el departamento de Bolívar y la población Rom o gitana.

Sin embargo la falta de datos e información sistemática del desarrollo y evolución de estas poblaciones, por ejemplo la población total por cada étnia y el número de hablantes correspondiente a cada idioma de cada étnia, dificulta recopilar y almacenar una base de datos suficientemente buena para aplicar el modelo de Abrams y Strogatz con un grado mayor de seguridad.

Solo a partir del Censo General del año 2005 y de encuestas como la Encuesta de Calidad de Vida (ECV) del año 2003 se formularon preguntas exactas para generar información sobre el autorreconocimiento de la población colombiana en cinco categorías étnicas, como sigue:

¿De cuál de los siguientes grupos étnicos se considera usted? 1.Indígena, 2.Gitano, 3.Raizal del Archipiélago, 4.Palenquero, 5. Negro, Mulato (afrodescendiente) ó 6. Ninguno de los anteriores.

Para cumplir con el objetivo inicialmente fijamos nuestro interés en la población Raizal y en la población Palenquera de Colombia procediendo a investigar y almacenar la mayor cantidad de datos posibles que nos muestren la cantidad de hablantes de cada idioma correspondiente a cada étnia en diferentes tiempos. Lastimosamente la falta de precisión e información en cada censo ó encuesta realizados y la dificultad para acceder de modo directo a las respectivas bases de datos, nos impide tener seguridad en la verificación del modelo de Abrams y Strogatz aplicándolo a los datos que respectivamente fueron encontrados.

Sin embargo como un punto de partida se expondrán las tablas correspondientes a los datos hallados en los documentos [9], [8] y [10] del Ministerio de Cultura de Colombia, [4] y [5] del Ethnologue: Languages of the World y [15] de los autores Sánchez y García. Y como ejercicio se intentará aplicar el modelo de Abrams y Strogatz a la población Palenquera, con algunas suposiciones, y los datos encontrados en el documento [11].

4.1. La población Raizal y Palenquera

La población raizal es el producto del mestizaje entre indígenas, españoles, franceses, ingleses, holandeses y africanos. La cual tiene sus propias expresiones culturales como lo es su idioma: el *criollo sanandresano* ó lo que otros llaman *inglés isleño*. Así, como ha de esperarse, el criollo sanandresano es la mezcla entre el inglés, francés y palabras de los idiomas africanos como se manifiesta en [9].

Inicialmente según el Ethnologue: Languages of the World para el año 1981 la población raizal era de 12.000, respecto a los 32.005¹ habitantes del Archipiélago de San Andrés, de los cuales la mayoría de los isleños hablaban el criollo sanandresano por lo tanto consideraremos que los mismos 12.000 raizales hablaban su idioma. Para ese momento se consideraba un idioma fuerte frente a los que estaban constantemente compitiendo con el en la isla.

En el año 1993 se aplica el Censo General el cual arroja como resultados que la población raizal es de 7.699 de un total de 61.040 habitantes del Archipiélago de San Andrés, sin embargo aquí no se habla nada respecto al total de los raizales que hablan su idioma. Para el año 2003 se aplica la ECV de la que se deduce que solo de la población mayor de 5 años del Archipiélago de San Andrés 22.963 se reconocen como raizales pero nuevamente no hay información sobre el número de hablantes del idioma.

Finalmente para el Censo General del año 2005 tenemos la primera información completa para cada étnia, así con un total de 59.573 habitantes del Archipiélago de San Andrés y Providencia 23.471 se reconocen como raizales de los cuales el 72,52 %, 18.971, hablan el idioma criollo (ver por ejemplo en [13]). Toda la anterior información es resumida en el Cuadro 4.1. Esta información excluye a los raizales y hablantes del

¹La población total del Archipiélago de San Andrés era de 22.983 en 1973 y 36.515 en 1985, según [9], e interpolando tenemos que la población total en 1981 era de aproximadamente 32.005.

criollo sanandresano que no viven en el Archipiélago. Se anota que los documentos consultados tienen discrepancias numéricas y hemos tratado de tomar los datos que consideremos más fiables.

| Raizal del archipiélago de San Andrés | | | |
|---|---------------------|------------------|----------------------------------|
| | Población étnica | Habla la lengua | Población total de San Andrés |
| Etnologue 1981 en [4] | 12.000 | 12.000 (100 %) | 32.005 (estimado) |
| Censo 1993 en [10] | 7.699 | - | 61.040 |
| ECV 2.003 en [15] | 22.963 | - | - |
| Boletín del Censo 2005 y Tesis de Maestría en [13] | 23.471 | 18.971 (72,52 %) | 59.573 |

Cuadro 4.1: Resumen de datos de la población Raizal recopilados a partir de varias fuentes.

Por otro lado tenemos que San Basilio de Palenque es un corregimiento del municipio de Mahates, en el departamento de Bolívar y es el lugar conformado por los africanos que lograron escaparse en la época de la conquista o colonia, en donde aún ellos conservan su cultura original en especial su idioma. El *palenquero*, como es conocido generalmente el idioma criollo de los palenqueros, tiene su base léxica en español con rasgos de lenguas de la familia bantú.

De acuerdo a el Ethnologue: Languages of the World en el año 1989 la población étnica palenquera era 3.500 de la cual el 14,3 % hablaba el idioma es decir 500 personas, por tal motivo lo consideran un idioma moribundo y en peligro de extinción. Para la ECV del año 2003 se registraron 4.607 palenqueros de la población mayor de 5 años pero no se registra nada respecto al número de hablantes del idioma.

Según el Censo General del año 2005 la población palenquera de San Basilio de palenque es de 7.470 y el 37,32 %, 2.788, reportaron que hablaban el idioma palenquero. Por último, en el informe preliminar sobre la primera campaña del autodiagnóstico sociolingüístico del Programa de Protección a la Diversidad Etnolingüística (PPDE), tenemos una amplia información del año 2008 inicialmente se reportan 7.998 palenqueros de los cuales el 34,21 % no entiende y no habla, el 24,16 % entiende y no habla, el 23,60 % entiende y habla poco, el 17,38 % habla normalmente y el 0,64 % no informa, pero para nuestro interés tomaremos el total de los que entienden y hablan poco, más los que hablan normalmente, es decir el 40,98 % de los 7.988 palenqueros. Resumimos toda la información sobre la población palenquera en el Cuadro 4.2.

Por lo tanto, como se muestra en los Cuadros 4.1 y 4.2, la información disponible sobre el número de hablantes del criollo sanandresano y del palenquero es precaria y poco fiable, en vista de la falta de uniformidad en los criterios y metodologías empleadas para efectuar y reportar las mediciones, por lo que no resulta posible, a partir de esta información, determinar si la evolución de estos idiomas corresponde o no al modelo de

Abrams y Strogatz.

| Palenquero de San Basilio | | |
|----------------------------------|------------------|-----------------|
| | Población étnica | Habla la lengua |
| Etnologue 1989 en [5] | 3.500 | 500 (14,3 %) |
| ECV 2003 en [15] | 4.607 | - |
| Censo 2005 en [8] | 7.470 | 2.788 (37,32 %) |
| PPED 2008 en [10] | 7.998 | 3.278 (40,98 %) |

Cuadro 4.2: Resumen de datos de la población Palenquera recopilados a partir de varias fuentes.

Sin embargo en el documento, Plan Especial de Salvaguardia de la Lengua Palenquera, 2012, [11] se amplía la información obtenida en el informe preliminar sobre la primera campaña del autodiagnóstico sociolingüístico del Programa de Protección a la Diversidad Etnolingüística (PPDE) en [10] en donde se distinguen no solo la población palenquera que habla su idioma nativo sino que además tenemos la clasificación por grupos de edades y generación. Así obtenemos una información más confiable de la cual partir para poder aplicar el modelo de Abrams y Strogatz. Debido a que en la primera etapa de esta campaña solo incorporaron al idioma palenquero entonces finalmente al criollo sanandresano no intentamos aplicarle el modelo.

La primera campaña del autodiagnóstico sociolingüístico, con el fin de identificar el estado en que se encontraba el palenquero, evaluó al pueblo palenquero a partir de cuatro competencias que permitieran conocer la habilidad o capacidad que tenían de hablar el idioma palenquero y las cuatro competencias son: 1. No entiende y no habla, 2. Entiende pero no habla, 3. Entiende y habla poco y 4. Habla bien.

Además se evaluó la habilidad que existe para hablar el palenquero en 3 generaciones que son: 1. Jefes de hogar, 2. Hijos de los jefes de hogar y 3. Nietos de los jefes de hogar, de la cual se observó que el palenquero es usado con más frecuencia por los jefes de hogar que por las generaciones más jóvenes como lo son los hijos y nietos de los jefes de hogar como lo muestran los datos del Cuadro 4.3.

| Hablantes de la lengua palenquera por generaciones | | | |
|---|------------|-----------------------|--------|
| | Habla bien | Entiende y habla poco | Total |
| Jefes de hogar | 63,1 % | 17,6 % | 80,7 % |
| Hijos de jefes de hogar | 5,9 % | 27,0 % | 32,9 % |
| Nietos de jefes de hogar | 4,2 % | 14,1 % | 18,3 % |

Cuadro 4.3: Clasificación de los hablantes del palenquero, en el año 2008, en tres grupos a partir del autodiagnóstico sociolingüístico de la lengua palenquera en [11].

4.2. Estimación de parámetros

Estudiaremos la evolución del idioma palenquero partiendo del grupo de los jefes de hogar de la población palenquera que hablan el idioma, es decir, debido a que la información que nos da la encuesta de autodiagnóstico sociolingüístico (ver Cuadro 4.3) está distribuida por generaciones y suponiendo que la tendencia de hablar el palenquero por estas generaciones se mantiene luego si para el año 2008 el 80,7 % de los jefes de hogares hablaban el palenquero entonces para el año 2028, 20 años después, los hijos de los jefes de hogar del año 2008 serán los nuevos jefes de hogar de los cuales solo el 32,9 % hablarán el palenquero y para el año 2048, 40 años después, los nietos de los jefes de hogar del año 2008 serán los nuevos jefes de hogar y solo el 18,3 % hablarán el palenquero.

Históricamente se suele considerar que durante los años 50 se iniciaron fenómenos de modernización que trajeron como consecuencia la pérdida progresiva de tradiciones y costumbres del pueblo palenquero, así como la disminución del número de personas con conocimiento del idioma palenquero. Es razonable entonces suponer que en 1958 la gran mayoría de la población adulta aún tenía conocimiento del idioma, aunque posiblemente los niños lo iban perdiendo progresivamente. Estimaremos que hacia 1958 el 90 % de la población palenquera adulta hablaba el idioma palenquero y tomamos este dato como condición inicial del modelo. Tomando como variable el tiempo t en años, en resumen tenemos los datos del Cuadro 4.4.

| t | Año | Porcentaje de jefes de hogar que hablan el palenquero |
|-----|------|---|
| 0 | 1958 | 90 % |
| 50 | 2008 | 80,7 % |
| 70 | 2028 | 32,9 % |
| 90 | 2048 | 18,3 % |

Cuadro 4.4: Porcentaje estimado de los jefes de hogar que hablarían el palenquero en diferentes tiempos futuros.

Como habíamos visto en el Capítulo 2 la ecuación diferencial (2.5) del modelo de Abrams y Strogatz no puede solucionarse explícitamente por lo tanto la solución, $x(t)$, con la que trabajaremos será numérica y se hallará empleando el comando *NDSolve* de Mathematica. Además estimaremos los parámetros a , c y s para los cuales se tenga la mejor aproximación respecto a los datos reales del Cuadro 4.4 por la técnica de los mínimos cuadrados.

El método de los mínimos cuadrados para estimar los valores de a , c y s , consiste en minimizar la función

$$f(a, c, s) = (x(t_1) - x^*(t_1))^2 + \dots + (x(t_n) - x^*(t_n))^2,$$

donde $x(t) = x(t; a, c, s)$ es la solución de la ecuación (2.5) y $x^*(t)$ es el valor experimental de la variable. En nuestro caso se reduce a la siguiente función

$$f(a, c, s) = (x(50) - 0,807)^2 + (x(70) - 0,329)^2 + (x(90) - 0,183)^2. \quad (4.1)$$

Ayudándonos de la rutina *FindFit* del programa Mathematica encontraremos los mejores valores para los parámetros c y s fijando el valor del parámetro de a y teniendo en cuenta que, según [1], el parámetro a está entre los números 1,06 y 1,56. Se espera entonces que los parámetros c y s tomen valores en el intervalo $[0, 1]$ y en particular c se relaciona con el porcentaje de hablantes del idioma que se pierden anualmente.

Por lo tanto en el Cuadro 4.5 se exponen los valores que encontramos numéricamente para los parámetros c y s . Así mismo mostramos el valor que la función (4.1) toma evaluada en esos parámetros con el fin de identificar, para esos valores, el valor mínimo que toma f .

| a | c | s | $f(a, c, s)$ | a | c | s | $f(a, c, s)$ |
|------|------|------|--------------|------|------|------|--------------|
| 1,06 | 0,77 | 0,46 | 0,108745 | 1,32 | 0,18 | 0,27 | 0,0265526 |
| 1,08 | 0,59 | 0,44 | 0,0419199 | 1,34 | 0,17 | 0,26 | 0,0261258 |
| 1,10 | 0,49 | 0,43 | 0,0295553 | 1,36 | 0,17 | 0,24 | 0,0253941 |
| 1,12 | 0,41 | 0,41 | 0,0449154 | 1,38 | 0,16 | 0,23 | 0,0261933 |
| 1,14 | 0,35 | 0,40 | 0,027281 | 1,40 | 0,15 | 0,22 | 0,0275967 |
| 1,16 | 0,31 | 0,38 | 0,036434 | 1,42 | 0,15 | 0,21 | 0,0263858 |
| 1,18 | 0,28 | 0,37 | 0,0255179 | 1,44 | 0,15 | 0,20 | 0,0256344 |
| 1,20 | 0,26 | 0,36 | 0,0328612 | 1,46 | 0,14 | 0,18 | 0,0252747 |
| 1,22 | 0,24 | 0,34 | 0,0269105 | 1,48 | 0,14 | 0,17 | 0,0253402 |
| 1,24 | 0,22 | 0,33 | 0,0294397 | 1,50 | 0,14 | 0,16 | 0,0258019 |
| 1,26 | 0,21 | 0,31 | 0,0293307 | 1,52 | 0,13 | 0,14 | 0,0255408 |
| 1,28 | 0,20 | 0,30 | 0,0253578 | 1,54 | 0,13 | 0,13 | 0,0260777 |
| 1,30 | 0,19 | 0,29 | 0,0271998 | 1,56 | 0,13 | 0,12 | 0,0269724 |

Cuadro 4.5: Estimación de los mejores parámetros a partir del método de los mínimos cuadrados

Concluimos finalmente que para los parámetros $a = 1,46$, $c = 0,14$ y $s = 0,18$ se tendría la mejor aproximación de los datos reales del palenquero con la solución numérica del modelo de Abrams y Strogatz. Así, con las suposiciones planteadas al comienzo del análisis, los hablantes del idioma palenquero disminuirán hasta el punto que el idioma desaparecerá como se muestra en la Figura 4.1.

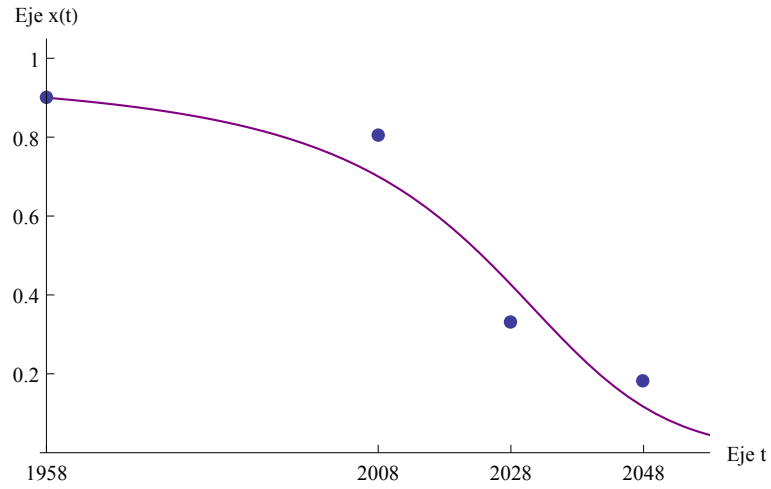


Figura 4.1: La dinámica del idioma palenquero en Colombia con el modelo de Abrams y Strogatz y los parámetros $a = 1,46$, $c = 0,14$ y $s = 0,18$.

Sin embargo esto es solo una aproximación burda de la realidad ya que lo ideal sería un trabajo multidisciplinario con estadísticos, lingüistas y una amplia base de datos, pero este trabajo es un primer acercamiento a aplicar un modelo matemático para estudiar la evolución de un idioma en nuestro país.

Capítulo 5

Conclusiones y trabajos futuros

5.1. Conclusiones

- En este trabajo logramos probar algunos de los resultados enunciados por Abrams y Strogatz en [1] y además experimentar el modelo con otras funciones de probabilidad que satisfagan las condiciones impuestas logrando concluir el Teorema 2.2.1.
- En el Capítulo 3, donde analizamos y estudiamos el modelo de Mira y Paredes publicado en [12], se logra hacer un estudio analítico bastante amplio en el cual se deduce una cota para el número de puntos de equilibrio del sistema como se enuncia en el Teorema 3.2.1.
- El estudio de la estabilidad de los puntos de equilibrio del modelo de Mira y Paredes no se logra hacer a fondo. Así que sólo se concluye la estabilidad cuando fijamos al parámetro $a = 1$ como se muestra en la Proposición 3.2.1.
- Se comprueba que los resultados encontrados para el modelo de Mira y Paredes coinciden con el artículo de Mira y Paredes [3] recientemente publicado.
- Los datos respecto al número de hablantes del idioma de las poblaciones étnicas, Palenquera y Raizal del Archipiélago de San Andrés, que las encuestas y los diferentes censos muestran son inicialmente muy pocos y poco fiables ya que falta uniformidad en los criterios y metodologías empleadas para efectuar y reportar las mediciones. Esto hace que no sea posible determinar en forma concluyente si la evolución de estos idiomas corresponden o no al modelo de Abrams y Strogatz. Sin embargo, se dio un primer acercamiento a implementar una nueva metodología matemática para que pueda ser usada posteriormente en otros estudios relacionados a la evolución de los idiomas en nuestro país.

- Probamos numéricamente que los parámetros a , c y s del modelo de Abrams y Strogatz, que corresponden al caso del idioma palenquero, son aproximadamente cercanos a los que ellos encuentran para los idiomas que estudiaron en [1].
- Concluimos, según nuestro análisis y con base en la confiabilidad de los datos analizados, que los hablantes del idioma palenquero disminuirán hasta el punto que el idioma desaparecerá.
- Si se logrará medir y monitorear constantemente estos idiomas las conclusiones, de la aplicación del modelo, a las que se llegarían serían más serias y seguras aunque esto requeriría un proyecto a largo plazo.

5.2. Trabajos futuros

- Encontrar una función de probabilidad que satisfaga las condiciones de Abrams y Strogatz pero que además la derivada en $x = 0$ sea cero y que haga que el modelo de Abrams y Strogatz tenga más de tres puntos de equilibrio o por el contrario demostrar que toda función de probabilidad con estas condiciones garantiza la existencia de un único tercer punto de equilibrio inestable.
- Tratar de aplicar el modelo de Mira y Paredes a la población Palenquera y Raizal de Colombia ya que se logró descubrir, en medio de la recolección de datos, un porcentaje alto de personas que declararán hablar no solo el idioma de la étnia sino el idioma español en perfectas condiciones, apareciendo así un grupo bilingüe bastante fuerte.
- Trabajar en la construcción de un modelo donde no sólo se de la competencia de dos idiomas sino de tres ya que es el caso real más cercano a la población del Archipiélago de San Andrés. Diferentes porcentajes de los habitantes del Archipiélago hablan el criollo sanandresano, el español y el inglés.
- Estudiar la posibilidad de aplicar el modelo de Abrams y Strogatz no solamente al problema de la competencia de idiomas sino a la competencia étnica, o a otras situaciones en que se de competencia entre grupos de personas, ya que efectivamente se recolectaron una mayor cantidad de datos del número de personas por cada étnia respecto al número de hablantes de la lengua nativa de cada étnia.

Bibliografía

- [1] D. M. Abrams and S. H. Strogatz. Linguistics: Modelling the dynamics of language death. *Nature*, 424:900, 2003.
- [2] *Departamento Administrativo Nacional de Estadística (DANE). La visibilización estadística de los grupos étnicos colombianos.* Consultado en https://www.dane.gov.co/files/censo2005/etnia/sys/visibilidad_estadistica_etnicos.pdf el 29 de Agosto de 2014.
- [3] V. O. Espinar, L. F. Seoane, J. J. Nieto, and J. Mira. An analytic solution of a model of language competition with bilingualism and interlinguistic similarity. *Physica D*, 264:17–26, 2013.
- [4] *Ethnologue Languages of the World. Islander Creole English.* Consultado en <http://www.ethnologue.com/language/icr> el 28 de Agosto de 2014.
- [5] *Ethnologue Languages of the World. Palenquero.* Consultado en <http://www.ethnologue.com/language/pln> el 28 de Agosto de 2014.
- [6] M. W. Hirsch, S. Smale, and R. L. Devaney. *Differential Equations, Dynamical Systems and An Introduction to Chaos*. Academic Press, New York, 2nd edition, 2004.
- [7] J. D. Meiss. *Differential Dynamical Systems*. Society for industrial and Applied Mathematics, Philadelphia, 2007.
- [8] *Ministerio de Cultura de Colombia. Caracterización comunidad palenquera: palenqueros, descendientes de la insurgencia anticolonial.* Consultado en <http://www.mincultura.gov.co/areas/poblaciones/comunidades-negras-afrocolombianas-raizales-y-palenqueras> el 28 de Agosto de 2014.
- [9] *Ministerio de Cultura de Colombia. Caracterización comunidad raizal: raizales, isleños descendientes de europeos y africanos.* Consultado en <http://www.mincultura.gov.co/areas/poblaciones/comunidades-negras-afrocolombianas-raizales-y-palenqueras> el 28 de Agosto de 2014.

- [10] *Ministerio de Cultura de Colombia. Informe preliminar sobre la primera campaña del autodiagnóstico sociolingüístico del programa de protección a la diversidad etnolingüística - PPDE.* Consultado en http://www.observatorioetnicocecoin.org.co/descarga/informe_preliminar_autodiagnostico_sociolinguiistico.pdf el 28 de Agosto de 2014.
- [11] *Ministerio de Cultura de Colombia. Plan Especial de Salvaguardia de la Lengua Palenquera, 2012.* Consultado en http://www.ocaribe.org/cargar_imagen.php?tipo=22&id=22 el 02 de Septiembre de 2014.
- [12] J. Mira and A. Paredes. Interlinguistic similarity and language death dynamics. *Europhys*, 69:1031–1034, 2005.
- [13] D. S. Mora. *Situación sociolingüística de la lengua creole de San Andrés isla, el caso de San Luis.* Universidad Nacional de Colombia, Bogotá, 2010. Trabajo de grado presentado para optar al título de Magíster en Lingüística.
- [14] L. Perko. *Differential Equations and Dynamical Systems.* Springer-Verlag, New York, 3rd edition, 2000.
- [15] E. Sánchez and P. García. *Más allá de los promedios: Afrodescendientes en América Latina. Los Afrocolombianos.* The World Bank, Washington, 2006.